Bayerische

Julius-Maximilians-Universität

Würzburg

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an Realschulen

Schriftliche Hausarbeit
zum Thema

Interaktive Lernpfade zum Thema „Brüche erweitern, kürzen und vergleichen"

eingereicht von:
Katja Heimlich

Fach:
Mathematik

eingereicht am:
18. Mai 2009

Dozent:
Michael Schuster

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Überhaupt lernt niemand etwas durch bloßes Anhören,
und wer sich in gewissen Dingen nicht selbst tätig bemühet,
weiß die Sache nur oberflächlich und halb.

Goethe[1]

Was sich wie ein Plädoyer für eigenständiges und selbsttätiges Lernen anhört, wird seit den 60er Jahren in der Didaktik unter dem Schlagwort „entdeckendes Lernen” diskutiert. Damals wurde gefordert, Lerninhalte nicht nur zu vermitteln, sondern sie durch eigenständige Erfahrungen des Lernenden in logischen Beziehungsnetzen zu verknüpfen. Dabei liegt der Nutzen vom eigenständigen Lernen auch für Goethe auf der Hand: Ein tieferes Verständnis für „gewisse Dinge” kann nur dann erfolgen, wenn der Lernende selbst aktiv wird, sich selbst bemüht.

Die vorliegende Arbeit begann mit der Zielsetzung für eines der größten Lernplanthemen „Brüche erweitern, kürzen und vergleichen” einen interaktiven, zum entdeckenden Lernen anregenden Lernpfad zu entwickeln und diesen dann in einer Klasse zu testen. Dabei sollte die „gemeine” Bruchrechnung aufgewertet werden, so dass übliche Fehler, die durch mangelhaftes Verständnis der Grundlagen entstehen, vermieden werden. Bei der Erstellung dieser Lernpfadgruppe und bei der Zusammenstellung aller dazugehörigen wesentlichen Aspekte stellte sich heraus, dass neben den technischen Gesichtspunkten didaktische, im Speziellen mathematik-didaktische, und fachmathematische Kenntnisse nicht ausreichend waren, um einen entsprechenden Lernpfad schülergerecht umzusetzen.

[1]Zitiert nach Lautenbach 2004: S. 610.

Teil I der Arbeit versucht demnach wichtige Begriffe moderner Lernkultur, wie Lernpfade, E-Learning sowie die, für das entdeckende Lernen notwendigen, lerntheoretischen Grundlagen und schließlich auch das entdeckende Lernen selbst zu klären. Dabei wurde jedoch schnell deutlich, dass einige dieser Begriffe meist nicht in einschlägiger Literatur oder in Lexika zu finden waren. Zum einen wird der Begriff des Lernpfades selbst in neueren Zeitschriften und Artikeln kaum verwandt, so dass hier Internetquellen maßgeblich zur Formulierung einer Definition und zur Eingrenzung von Verwendungsart und -weise hinzugezogen wurden. Zum anderen sind die Begriffe wie E-Learning und entdeckendes Lernen zwar im didaktischen Sprachgebrauch verankert, in der Literatur aber nur als Stichworte zu einer Vielzahl von Definitionen und Interpretationen, zu denen meist ein Bezug zur Mathematik fehlt, zu finden. Hier musste zunächst ein Zusammenhang zwischen Mathematik und entdeckendem Lernen mit dem Computer hergestellt werden, um anschließend über die Didaktik der Bruchrechnung zum Themenbereich „Brüche erweitern, kürzen und vergleichen" reflektieren zu können.

Nachdem diese einzelnen theoretischen Blickwinkel miteinander verwoben wurden, kann im *Teil II* der Arbeit das Gesamtkonzept der gestalteten Lernpfadgruppe didaktisch und fachwissenschaftlich hinterfragt werden, wobei die Ergebnisse der theoretischen Grundlagen aufgegriffen und eingegliedert werden. Dabei werden eingangs die Inhalts- und Prozessziele der Lernpfade skizziert, die ursprünglichen Ansätze und Ideen offengelegt und im Hinblick auf die bei der Durchführung der Lernpfadgruppe in einer Klasse entstandenen Probleme zu den einzelnen Stationen vorgestellt. Auch die technischen Schwierigkeiten, die bei der Erstellung der Lernpfade auftraten, werden unmittelbar daran in einem eigenen Kapitel erörtert und zusammengefasst.

Im Anschluss werden in *Teil III* die Erfahrungen, die bei einem Probedurchlauf in einer Realschule gesammelt werden konnten, vorgestellt, wobei die Probleme, die die Schüler bei der Bearbeitung der Lernpfade nannten, bereits in *Teil II* bei der Beschreibung der einzelnen Lernpfade und Stationen eingefügt wurden. Auch der Test, den die Schüler nach dem Probelauf schreiben mussten, wird beschrieben und ausgewertet. Die Lösungsvorgänge der Schüler werden dabei analysiert, teilweise sowohl die richtigen als auch die falschen, um so zu ergründen, welche Inhaltsziele und welche Prozessziele die Schüler erreicht haben und welche nur durch die Bearbeitung des Lernpfades, ohne die Inhalte zu vertiefen oder zu wiederholen, zu hoch gesteckt waren. Als letzten

Punkt sollen die Ergebnisse der vorliegenden Lernpfadgruppe unter dem Gesichtspunkt der Effektivität betrachtet werden. Fragen wie „Was könnte man an dem Lernpfad verbessern?”, „Warum ist der Test nicht so gut wie erwartet ausgefallen?” oder „Welche Konsequenzen sind nach der Auswertung des Tests für die Anwendung der Lernpfadgruppe zu ziehen?” sollen hier aufgegriffen werden und es soll versucht werden, diese zu beantworten.

Ziel dieser Arbeit ist eine theoretische Darstellung aller wesentlichen Aspekte, die bei der Erstellung der Lernpfadgruppe „Brüche erweitern, kürzen und vergleichen” berücksichtigt wurden. Dabei beziehen sich die lerntheoretischen Aspekte, das Thema „Brüche erweitern, kürzen und vergleichen” im Schulunterricht sowie die Reflexion auf didaktische Ideen und Möglichkeiten, welche die vorliegende Arbeit versucht umzusetzen.

Teil I

Theoretische Grundlagen

Kapitel 2

Lernpfade und E-Learning

Der Einsatz neuer Medien[2] und Technologien unterstützt das Lernen der Schüler, so dass „traditionelle Lernziele des Mathematikunterrichts besser erreicht werden als bisher" (Weigand / Weth 2002: S. 21). Diese neuen medialen Wege können durch ihre interaktive Vielfalt zu einem einfacheren Verstehen anregen und bieten so die Chance für eine moderne und zeitgemäße Unterrichtsgestaltung (vgl. Barzel / Weigand 2008: S. 4).

Folglich kann der Computer die Schüler bei vielen grundlegenden mathematischen Arbeitsweisen, von der Berechnung über die graphische Darstellung bis zur interaktiven Variation, unterstützen (vgl. Barzel / Weigand 2008: S. 4) und erlaubt es gleichzeitig, die Schüler im technologischen Bereich weiterzubilden. Dabei können die neuen Medien unterschiedlich eingesetzt und angewandt werden: interaktive Arbeitsblätter, wie sie beispielsweise mit GeoGebra entwickelt werden können, Lernprogramme und -sequenzen oder Lernumgebungen sind die häufigsten Verwendungen (vgl. Barzel / Weigand 2008: S. 5). Zu Letzteren, den Lernumgebungen, gehört auch die neue Form des interaktiven, entdeckenden Lernens am und mit dem Computer durch Lernpfade (vgl. Barzel / Weigand 2008: S. 5). Im Folgenden wird dargestellt, was ein Lernpfad ist und wie er sich in das E-Learning eingliedert.

[2]Hier wird zu den „Neuen Medien" i.A. der Computer gezählt, der durch die Möglichkeit einer interaktiven Verknüpfung dynamische Erkundungen zulässt (vgl. Barzel / Weigand 2008: S. 5).

2.1 Lernen mit Lernpfaden

Einzelne Werkzeuge[3] wie dynamische Geometriesoftware, hierbei wäre das bereits erwähnte GeoGebra zu nennen oder auch Tabellenkalkulationsprogramme wie Excel, werden schon jetzt häufig im Mathematikunterricht eingesetzt und sind dabei meist nicht viel mehr als isolierte Lernhilfen. Mit dem stetig wachsenden Interesse am E-Learning[4] steigen Ansprüche an elektronische Lernhilfen, so dass mit sogenannten „Lernpfaden"[5] versucht wird, diesen nachzukommen.

2.1.1 Begriffsabgrenzung Lernpfad

Für den Begriff „Lernpfad" gibt es zur Zeit noch keine feste Definition (vgl. auch Weigel 2008: S. 10), eine Begriffsabgrenzung ist dennoch möglich.

In technischer Hinsicht handelt es sich bei einem Lernpfad, der den Schülern über das Internet zugänglich gemacht wird, lediglich um eine Abfolge von Lernschritten. Dabei gehört zu jedem einzelnen Lernschritt eine eigene kleine Aufgabe, die entweder aus den vorstehenden elektronischen Lernhilfen, aus weiterführenden Links oder aus gestalteten Beschreibungs- und Aufgabentexten besteht. Interaktive Tests oder Puzzles sind ebenso denkbar. Auf der inhaltlichen Ebene erlaubt es ein Lernpfad, diese einzelnen Lernschritte zu einem Ganzen zusammenzufügen. Auf diese Weise können Lernprozesse organisiert und unterstützt werden und über längere Zeiträume erfolgen (vgl. Embacher 2004a: o. S.). Die Bezeichnung „Lernpfad" beschreibt außerdem, dass ein bestimmter Weg durch ein Themengebiet empfohlen oder konkret verlangt wird

[3]Der Begriff „Werkzeug", wie er hier verwendet wird, bezieht sich auf dessen Darstellung nach Barzel / Weigand. Dabei sind einzelne computergestützte Programme gemeint, die den Unterricht durch deren Anschaulichkeit und Variation bereichern (vgl. Barzel / Weigand 2008: S. 5).

[4]Die Rechtschreibung des Begriffes stützt sich in dieser Arbeit auf die in der Brockhaus-Enzyklopädie verwendeten Form.

[5]Ausgewählte Lernpfade im Bereich des Mathematikunterrichts, die in Zusammenarbeit mit engagierten Lehrern erstellt und getestet werden, können beispielsweise unter http://wiki.zum.de/Mathematik-digital aufgerufen werden. Auch die Landesakademie für Fortbildung und Personalentwicklung an Schulen in Baden Württemberg bietet unter http://lehrerfortbildung-bw.de/unterricht/lernpfade/ Lernpfade für alle Fächer an. Besonders weit im Hinblick auf die Verwendung von Lernpfaden mit Neuen Medien ist das Konzept *monk* aus Österreich, das im Rahmen des Projekts „Lernpfade im Mathematikunterricht – Ansätze zu einer breiten Integration" im Schuljahr 2003/2004 ins Leben gerufen wurde. Unter http://www.mathe-online.at/monk/ kann dieses Projekt mit zahlreichen mathematischen Lernpfaden eingesehen werden.

(vgl. Oberhuemer 2004: o. S.).

Lernpfade, wie sie hier in dieser Arbeit gemeint sind, sollen von Lehrern für ihre und auch andere Schüler gestaltet sein. Durch die Stoffsammlung, Strukturierung und Gestaltung der einzelnen Lerninhalte zu einem gesamten Lernpfad, können Schüler ihn weitgehend selbstständig durchführen, eine Unterstützung durch den Lehrer ist jedoch jederzeit vorstellbar (vgl. Stepancik 2004: o. S.). Dies ist nur möglich, wenn ein Lernpfad nicht nur als bloße Aneinanderreihung der einzelnen computergestützten Lernhilfen und Inhalte zu sehen ist. Die didaktische Herausforderung und Schwierigkeit für Lehrer besteht darin, dem gesamten Komplex durch eine innere Logik, durch Beschreibungstexte und Bezüge innerhalb der einzelnen Materialien einen Sinn zu geben und nicht nur Links aneinander zu reihen. Dies gilt besonders, wenn der Lernpfad das selbstgesteuerte, entdeckende Lernen (siehe 3.2 Entdeckendes Lernen, S. 27) der Schüler unterstützen soll (vgl. Embacher 2004b: o. S.).

2.1.2 Planung und Gestaltung von Lernpfaden

Für den Mathematikunterricht eignet sich die Verwendung von Lernpfaden besonders, da mathematische Stoffgebiete oftmals aufeinander aufbauen und im Laufe des Lernprozesses meist komplexer werden. Diese vernetzte Struktur kann durch einen Lernpfad besser überblickt werden. Sie setzt der Gestaltung jedoch gleichzeitig gewisse Grenzen. Die so entstehende Herausforderung bei der Gestaltung von Lernpfaden ist kurz gesagt der Versuch herauszufinden, „*was* gelernt werden soll und *wie* es am besten gelernt werden kann” (Embacher 2004b: o. S.; Hervorhebung im Original, Anm. d. Verf.). Dabei müssen im Vorfeld für die Planung einige Fragen geklärt werden, um einen didaktisch aufbereiteten Lernpfad kreieren zu können.

Das *Thema*, welches man in einem Lernpfad umsetzen möchte, muss sorgfältig ausgesucht werden, da sich nicht alle Themen für einen eigenständigen Entdeckungsprozess der Schüler eignen. Ist ein Thema gewählt, muss der Lehrer entscheiden, wie er es so umsetzt, dass die Schüler den Lerninhalt entdecken können. Zu geeigneten Materialien gehören Verweise auf diverse Webseiten, die mit ihrem eigenen Inhalt den Schülern bei ihrem Entdecken helfen, Aminationen und Java-Applets können durch ihre sehr hohe Interaktivität zu einem besseren Verstehen beitragen und erlauben es, das Verstandene gleich anzuwenden. Nicht zu viele, aber auch nicht zu wenige dieser Gestaltungsmöglich-

keiten sollten bei der Umsetzung eines ausgesuchten Themas berücksichtigt werden (vgl. Stepancik 2004: o. S.).

Damit schon vor der Ausgestaltung eines Lernpfades entschieden werden kann, wie die zu erreichenden *Lernziele* umgesetzt werden sollen, müssen diese im Vorfeld festgelegt werden. Dazu kann es Differenzierungen für starke und schwache Schüler geben, beispielsweise durch Pflicht- oder Wahlaufgaben, durch Zusatzaufgaben oder durch unterschiedliche Software (vgl. Stepancik 2004: o. S.).

Außerdem ist zu klären, mit welchem *System* der Lernpfad zur Verfügung gestellt werden soll. Für eine größtmögliche Zugänglichkeit zu den Lernpfaden bietet sich der Einsatz von Webbrowsern an, da diese auf allen und auch älteren Computern zur Verfügung stehen. Dabei können Lernpfade entweder als eigene Internetseite erstellt oder in ein Content-Management-System (CMS) eingebunden werden, das eine gemeinschaftliche Erstellung und Bearbeitung von themenbezogenen Internetseiten ermöglicht und organisiert, ohne dabei fortgeschrittene HTML-Kenntnisse vorauszusetzen. Der vorliegende Lernpfad wurde in ein Wiki eingebaut, dem ein solches CMS zugrunde liegt.

Die *didaktische Umsetzung* erfolgt zum Schluss, hierbei muss der Lehrer entscheiden, welches Lernziel wie und warum angelegt und verarbeitet werden soll, damit die Schüler weitgehend eigenständig arbeiten können.

2.1.3 Vorteile der Verwendung von Lernpfaden

Obwohl der Begriff noch nicht genau definiert ist und die Erwartungen an einen Lernpfad sich in Aufbau und Gestaltung sehr unterscheiden, gibt es immer mehr Internetseiten, die Lernpfade für den Unterricht anbieten. Dementsprechend kann die Frage nach Vorteilen des Arbeitens mit Lernpfaden kurzerhand beantwortet und im Folgenden aufgelistet werden.

- Lernpfade stehen für effizientes Lernen, da sie reproduzierendes, faktenorientiertes, forschendes und entdeckendes Lernen anregen und fördern. Durch stimmige Arbeitsaufträge und Hilfestellungen ist es den Schülern möglich, geeignete Themen selbstständig zu erarbeiten (vgl. Stepancik 2004: o. S.). Dabei entstehen die gleichen Vorteile, wie sie das entdeckende Lernen bieten kann (siehe 3.2.3 Vorteile entdeckenden Lernens, S. 31).

- Durch die hohe Visualisierung und Interaktivität von Lernpfaden werden die Schüler bei der Ausbildung von anschaulichen Vorstellungen und Zusammenhängen unterstützt. Dies erleichtert und entformalisiert den Umgang mit mathematischen Strukturen. Weiterhin erlaubt es die Interaktivität zusätzlich, dass die Schüler kontrolliert werden und auch sich selbst kontrollieren, wodurch mögliche Fehlvorstellungen abgefangen werden können (vgl. Embacher 2004b: o. S.).

- Die Einbindung komplexer und vernetzter Inhalte in eine einheitliche mediale Lernumgebung hilft bei der Überblicksbildung und Strukturierung des Lernstoffes, damit sich die Schüler auf ihren Lernprozess konzentrieren können, ohne dass sie die Befürchtung haben müssen, den Überblick zu verlieren (vgl. Embacher 2004a: o. S.).

- Nach der Durchführung eines eigens erstellten Lernpfades, lässt es die leichte Erweiter- und Veränderbarkeit zu, den Lernpfad für kommende Einsätze zu optimieren und zu verbessern (vgl. Oberhuemer 2004: o. S.).

- Zuletzt bietet die Gesamtheit der positiven Eigenschaften der Lernpfade einen zeitgemäßen, effizienten und nachhaltigen Mathematikunterricht (vgl. Stepancik 2004: o. S.).

2.1.4 Was bei dem Einsatz von Lernpfaden zu beachten ist

Werden Lernpfade im Unterricht verwendet, dazu gehören sowohl selbsterstellte sowie bereitgestellte, muss die Lehrkraft einige Aspekte beachten, dass das Lehren und Lernen mit Lernpfaden effektiv erfolgen kann.

Damit das Arbeiten mit Lernpfaden reibungslos abläuft, muss der Lehrer im Vorfeld die *technische Organisation* übernehmen. Dazu gehört es, folgende Fragen zu klären (vgl. Stepancik 2004: o. S.): Wie viele Computer stehen an der Schule zur Verfügung? Sind diese im geplanten Zeitraum unbesetzt? Ist das Schulnetzwerk stabil oder sind Ausweichprogramme und -systeme vorhanden? Muss es Einführungsstunden geben, weil die Schüler erst mit der Technik vertraut gemacht werden müssen?

Sind diese Punkte geklärt, folgt der nächste Schritt: das *Lernen mit Lernpfaden*, bei dem es ebenfalls einiges zu berücksichtigen gilt. Anfangs gilt es

zu überlegen, wie die Schüler Versäumtes nachholen können. Denn nicht alle Schüler haben zu Hause Zugang zu einem funktionierenden Computer (vgl. Stepancik 2004: o. S.). Außerdem ist der Zeitrahmen angemessen zu wählen, damit die Schüler zwar entdeckend lernen können, aber dazu gleichzeitig nicht zu viele Unterrichtsstunden benötigt werden (vgl. Oberhuemer 2004: o. S.). Weiterhin muss der Lehrer stets einen groben Überblick haben, wie es um den Lernfortschritt der Schüler bestellt ist (vgl. Stepancik 2004: o. S.). Ähnlich wie beim Stationenlernen, zu dessen Form auch Lernpfade gehören (vgl. ZUM Internet e.V. 2007: Lernpfad, o. S.), bietet sich ein Laufzettel[6] an. Nicht zuletzt bleibt es zu planen, wie diese Art von Unterricht bewertet werden soll (vgl. Stepancik 2004: o. S.), da sowohl das Lernen mit neuen Medien als auch das entdeckende Lernen keinen gewöhnlichen Bewertungrichtlinien unterliegen kann (siehe Abschnitt 3.2.3: S. 31).

2.1.5 Fazit

Obwohl die Arbeit im Unterricht mit Lernpfaden einen höheren Arbeitsaufwand von den Lehrern abverlangt und auch die Schüler in ungewohntem Maß selbsttätig lernen sollen, überwiegen die Vorteile und Möglichkeiten, die diese neue Form des Unterrichts bietet. Ein Versuch dieser Methodik sollte deshalb die unmittelbare Konsequenz daraus sein. Jede Lehrkraft muss allerdings für sich selbst entscheiden, ob es ratsam ist, einen Lernpfad alleine zu gestalten oder die Zusammenarbeitsmöglichkeiten auf etwaigen Plattformen, wie sie das ZUM-Wiki bietet, anzunehmen. Dazu kommt die Abwägung, wie viel Zeit für solche Methoden im Schulalltag überhaupt aufgebracht werden kann.

2.2 Lernpfade als Teil des E-Learning

Nach Weigel gliedern sich Lernpfade in den Bereich des E-Learning ein (vgl. Weigel 2008: S. 10) und repräsentieren damit eine Form des computergestützten Lernens mit Hilfe von Multimedia- und Netzwerktechnologien, mit der das E-Learning häufig verbunden wird (vgl. Brockhaus 2006: Bd. 7, S. 672) . Der eigentliche Begriff „E-Learning" beinhaltet jedoch noch andere, verschiedene

[6] Ein Laufzettel, wie er in Barzel et al. beschrieben wird, eignet sich dort für Stationenlernen. Er kann auch bei längeren Lernpfaden zusätzliche Übersichtlichkeit schaffen; auch Anweisungen während des Lernpfades können auf dem Laufzettel vermerkt werden (vgl. Barzel et al. 2007: S. 205).

Aspekte, die zum Verstehen der Bedeutung des Wortes beitragen und helfen, es genauer zu bestimmen.

2.2.1 Was ist E-Learning?

Im Wesentlichen gibt es nach Flindt zwei Formen, unter welche all die schillernden Beschreibungen des Ausdruckes E-Learning fallen: eine extensive und eine restriktive Verwendung (vgl. Flindt 2005: S. 25).

Das durchaus weite Verständnis der extensiven Verwendung beinhaltet die etymologische Deutung, dass das „E" von E-Learning sich von „electronic" ableitet und damit als Oberbegriff für das Lernen mit jeglichen elektronischen Medien zu verstehen ist. Dazu können „neben netz- oder internetgestütztem Lernen auch das TV-Telekolleg, Lernvideos, Hörkassetten, virtuelle Konferenzen oder das Business- und Schul-Fernsehen" (Flindt 2005: S. 25) gehören.

Dass E-Learning als „Oberbegriff für alle Varianten internetbasierter Lehr- und Lernangebote verstanden [wird]" (Kerres 2001: S. 14) und dass E-Learning selbstgesteuertes und entdeckendes Lernen mittels interaktiver Lernmodule unterstützen und fördern soll (vgl. Flindt 2005: S. 26), umfasst die engere Auslegung der restriktiven Verwendung. Auch hier wird das „E" von E-Learning zwar als Ableitung von „electronic" gesehen, aber unter den unterschiedlichen kontextuellen Voraussetzungen, die diese Art von Lernen mit sich bringt, impliziert das „E" eben auch „netzangebunden" oder „online". (vgl. Flindt 2005: S. 27)

Eine strikte Trennung der zwei vorgeschlagenen Verwendungen wird jedoch kaum eingehalten, so verwenden Weigel (vgl. Weigel 2008: S. 11f.) oder auch de Witt (vgl. de Witt 2008: S. 440) eine Kombination, die E-Learning als Lehr- und Lernprozesse mit neuen, zum Teil auch internetgestützten Medien sieht und dabei sämtliche Varianten von Lehr- und Lernaktivitäten einschließt, die das Internet zur Informationbeschaffung oder Kommunikation nutzen. Flindt selbst schlussfolgert aus ihren Überlegungen zu dem Begriff E-Learning, dass „e-learning [...] ein interaktives Lernszenario [ist], das vor allem netzwerkgestütztes (internet- und intranetgestütztes) Lernen ermöglicht" (Flindt 2005: S. 28; Text im Original hervorgehoben, Anm. d. Verf.). Diese Bestimmung kommt der Verwendung von Lernpfaden, wie der Vorliegende verstanden wurde, nahe, so dass nun der Blick auf den Einsatz von E-Learning in Schule und Unterricht gerichtet werden kann.

2.2.2 Anwendung von E-Learning

Obwohl es nach den vorangegangenen Ausführungen den Anschein macht, dass E-Learning eine Erfindung der vergangenen Jahre ist, kann nach Reimann begründet werden, dass „das Lernen mit digitalen Medien bzw. mit dem Leitmedium des Computers [...] mindestens bis in die 1980er zurück[geht]" (Reimann 2007: S. 182). Diese Nachfrage nach neuen Unterrichtsformen ging davon aus, dass E-Learning zu einer Verbesserung der traditionellen Lehre und des Unterrichts beitragen könne, da diese durch die Nutzung von elektronischen Hilfmitteln „abwechslungsreicher, motivierender und anregender gestaltet sowie damit verbundene Lernzeiten bzw. -orte flexibilisiert werden könn[t]en" (Brockhaus 2006: Bd. 7, S. 673). Die erste Euphorie in Bezug auf diese Vorteile des Lernens und Lehrens mit digitalen Medien ist vergangen, da die Lerneffekte zum Teil hinter den großen Erwartungen an die Technik zurückblieben (vgl. Brockhaus 2006: Bd. 7, S. 673). Dadurch ist der Bedarf an pädagogisch-didaktischer Expertise bei diesem Thema erkannt worden (vgl. Reimann 2007: S. 182) und man muss nach den Hintergründen des Lernens sowie nach schülerorientierter Gestaltung von Lernen bzw. E-Learning fragen.

Kapitel 3

Lerntheoretische Hintergründe

Es gibt keine allumfassende Antwort darauf, wie die einzelnen Schüler lernen. Dennoch lassen sich die verschiedenen theoretischen Annahmen bestimmten Lerntheorien zuordnen. Zu den wichtigsten zählen der Behaviorismus, der Kognitivismus und der Konstruktivismus. Aus mediendidaktischer Perspektive sollen diese Ansätze zunächst skizziert werden. Da mit den interaktiven Medien große Hoffnungen für neue Formen des Lernens, wie der später vorgestellte kognitive Stellvertreter, das entdeckende Lernen, verbunden werden, wird eine jeweilige kurze Zusammenfassung für die Relevanz der Lerntheorien für das computergestützte Lernen gegeben (vgl. Meschenmoser 2002: S. 105f.).

3.1 Lern- und Erkenntnistheorien

3.1.1 Behaviorismus

Pawlows (1849–1936) Arbeit über klassische Konditionierung[7] und Skinners (1904–1990) Untersuchungen schufen Anfang des 20. Jahrhunderts die Grundlage für den Behaviorismus (vgl. Köhler et al. 2008: S. 481). Die Auffassung des Behaviorismus, „[...] die Psychologie solle eine objektive Wissenschaft sein, die das Verhalten ohne Bezug auf mentale Prozesse untersucht" (Myers 2008: S. 353) zeigt, dass in diesem methodischen Prinzip der Lernende als eine Art „Black Box" (Köhler et al. 2008: S. 482) gesehen wird, die ähnlich einer Ma-

[7] Die klassische Konditionierung ist eine „Form des Lernens, bei der ein Organismus Reize miteinander assoziiert. Ein neutraler Reiz wird durch wiederholte Darbietung mit einem unkonditionierten Reiz (US) gekoppelt und wird so zum Signal für das Auftreten des US; schließlich ruft der neutrale Reiz allein die konditionierte Reaktion hervor und wird dann als konditionierter Reiz [...] bezeichnet" (Myers 2008: S. 343).

schine auf einen äußeren Reiz mit einer Reaktion antwortet, als ob sie von diesem gesteuert würde. Von dieser Basis ausgehend entwickelte Skinner erste Konzepte des „programmierten Unterrichts” und des damit verbundenen „programmierten Lernens”[8](vgl. Köhler et al. 2008: S. 482).

Obwohl heute die Forscher im Allgemeinen darin übereinstimmen, dass die Psychologie mentale Prozesse untersuchen sollte, und nur noch wenige einen radikalen Behaviorismus vertreten, teilen sie die Auffassung, dass dessen theoretische und methodische Prinzipien das Denken nachhaltig beeinflusst haben (vgl. Zimbardo / Gerrig 1999: S. 13).

Behaviorismus und das Lernen mit dem Computer

Eine computergestützte Lernumgebung, die nach den Prinzipien des Behaviorismus gestaltet ist, sollte den folgenden Aspekten genügen. „Der Lehrende hat die Kontrolle über die Lernumgebung, während der Lernende keinen Einfluss darauf ausüben kann” (Köhler et al. 2008: S. 482). Der Lernstoff ist auf kleine, aufeinander aufbauende Einheiten verteilt, die durch Frage-Antwort-Ketten aufbereitet werden. Der Lerner soll nach Beantwortung einer Frage sofort eine Rückmeldung bekommen, um somit aus positiver und negativer Verstärkung zu lernen. Der Lehrer gibt hierbei sowohl den Lernstoff als auch die verfügbare Zeit vor (vgl. Köhler et al. 2008: S. 482).

3.1.2 Kognitivismus

Etwa ab Mitte der 70er Jahre[9] wurde die sogenannte „kognitive Wende” (Zimbardo / Gerrig 1999: S. 13) eingeläutet, die an die Stelle des Behaviorismus zwar kein alle bisherigen Ansätze überdeckendes Modell treten ließ, aber dennoch dürfte es kaum ein einfluss- und folgenreicheres Forschungsparadigma geben als den sich zu dieser Zeit entwickelnden kognitiven Ansatz (vgl. Zimbardo / Gerrig 1999: S. 13).

Piaget, Abeli und Bruner[10] schenkten mit ihren Untersuchungen dem be-

[8] Das programmierte Lernen ist, ähnlich der sokratischen Dialoge wie der Menon-Dialog, als eine Art Zwiegespräch zwischen Autor und Schüler zu sehen. Dadurch soll eine größtmögliche Individualisierung des Lernprozesses stattfinden (vgl. Weigel 2008: S. 76f.).

[9] Diese Zeitspanne richtet sich nach der Entwicklung in Deutschland. In den USA hat das behavioristische Modell bis in die 60er Jahre gewirkt und wurde dann durch den Kognitivismus abgelöst (vgl. Zimbardo / Gerrig 1999: S. 13).

[10] Bruner wird die Forderung nach entdeckenden Lernen zugeschrieben (vgl. Führer 1997: S. 58), die als Grundlage für zeitgemäßen Unterricht gesehen wird und die ich als Ausgangs-

wussten, entdeckenden, problemlösenden und kreativen Lernen eine besondere Aufmerksamkeit. Dabei wird der Lernende als ein Individuum begriffen, das von außen herangetragene Reize eigenständig und vor allem aktiv verarbeiten kann, ohne dass eine Steuerung durch Stimulationen notwendig wäre (vgl. Meschenmoser 2002: S. 111). Der so ablaufende Lernprozess gleicht einer Wechselwirkung, die zwischen den bereits vorhandenen Wissensstrukturen und den angebotenen Informationen entsteht, so dass sich beim Lernen neue Verhaltensmuster durch die Interaktion mit der Umwelt oder der Lernangebote entwickeln (vgl. Köhler et al. 2008: S. 483). Nicht das behavioristische Reiz-Antwort-Schema sondern die Tatsache, dass sich kognitive Strukturen dadurch entwickeln können, dass der Lernende aktiv handelnd tätig ist, zeichnen diese Lerntheorie aus (vgl. Meschenmoser 2002: S. 113). Diese ist in Anlehnung an Erfahrungen, die durch die Theorien für die Erforschung der natürlichen Intelligenz durch die aufkommenden Computerwissenschaften entstanden, zu sehen (vgl. Zimbardo / Gerrig 1999: S. 14).

Diese kognitivistischen Erkenntnisse wurden u.a. im entdeckenden Lernen relativ schnell pädagogisch umgesetzt und sollten den lehrerzentrierten Frontalunterricht ablösen (vgl. Meschenmoser 2002. S. 112).

Kognitivismus und das Lernen mit dem Computer

Die kognitive Lerntheorie hat einen starken Einfluss auf die Konzeption computergestützten Lernens. So sollen Lernumgebungen gestaltet werden, die dem Lernenden Inhalte anbieten, die an die einzelnen, individuellen Fähigkeiten angepasst sind (vgl. Köhler et al. 2008: S. 483). Für eine dementsprechende Umsetzung einer computergestützten Lernumgebung sollten deshalb die Lebenswelt der Schüler und deren Interessen bei der Auswahl der Unterrichtsgegenstände berücksichtigt werden (vgl. Meschenmoser 2002: S. 112). Der Lernende sucht selbstständig die für die Problemlösung geeigneten Informationen, um diese dann anzuwenden. Die Methode erinnert an das entdeckende Lernen, das stellvertretend für die kognitive Ansätze herangezogen werden kann (vgl. Weigel 2008: S. 81). Eine mediale Unterstützung für das entdeckende Lernen kann durch eine Lernumgebung, die auf einem reichhaltigen Informationsangebot basiert, geleistet werden (vgl. Köhler et al. 2008: S. 483).

punkt meiner Überlegungen zum Aufbau des Lernpfades nutze.

3.1.3 Konstruktivismus

Im Konstruktivismus betont man ausgehend von kognitiven Erkenntnistheorien die Bedeutung der individuellen Wahrnehmung. Obwohl auch hier das Lernen als aktiver Prozess, der aus bestehendem Wissen durch andere Sichtweisen und Informationen Neues entstehen lässt, angenommen wird, geht der Konstruktivismus davon aus, dass die Realität vom Menschen erzeugt, sogar konstruiert wird (vgl. Meschenmoser 2002: S. 115). Bei dieser Herangehensweise besteht ein fließender Übergang zum Kognitivismus, deshalb muss zwischen dem radikalen Konstruktivismus und dem kognitiven Konstruktivismus unterschieden werden. Nach dem radikalen Konstruktivismus kann der Lernende objektive Realität nicht erkennen und verarbeiten. Er muss die eigene Realität mit Hilfe seines Lehrers als Coach erst herstellen. Im Gegensatz dazu erkennt der kognitive Konstruktivismus die Umwelt, die den Menschen beeinflusst, an (vgl. Köhler et al. 2008: S. 484).

Konstruktivismus und das Lernen mit dem Computer

In einer nach dem konstruktiven Ansatz gestalteten computergestützten Lernumgebung kann Wissen nicht durch Lehrende vermittelt werden, sondern muss selbstständig von Lernenden konstruiert werden (vgl. Köhler et al. 2008: S. 484). Dabei kann, im Sinne des radikalen Konstruktivismus, auf jegliche, den Lernprozess steuernde Elemente verzichtet werden (vgl. Meschenmoser 2002: S. 115). Nach Weigel sind in diesem Zusammenhang offene Lernumgebungen, in denen ausschließlich selbstständig gearbeitet werden soll und die als Gegenpol zu einem strukturierten und lernzielorientierten Lernangebot zu sehen sind, zu nennen (vgl. Weigel 2008: S. 86). Da jedoch Lernziele und andere didaktisch begründete Rahmenbedingungen in der schulischen Ausbildung zumindest in Deutschland nicht wegzudenken sind, wurde dieses beschriebene Extrem abgemildert und kann sich nach Meschenmoser wohl für einige ausgewählte Materialien für den Unterricht eignen (vgl. Meschenmoser 2002: S. 116).

3.1.4 Zusammenfassung

Die verschiedenen Ansätze der Lerntheorie bilden die Basis für eine Ausarbeitung von E-Learning Materialien, zu denen der vorliegende Lernpfad gehört.

Jedoch ist trotz der unterschiedlichen Sichtweisen und Aspekte der computergestützten Nutzung keine feste Zuordnung des Lernpfades zu einer der vorgestellten Theorien möglich, da der Gesamtheit der Gestaltung die verschiedensten lerntheoretischen Begründungen zugrunde liegen. Das entdeckende Lernen wird dem kognitiven Ansatz zugeordnet und wurde als Grundlage für die vorliegenden Lernpfade verwandt. Ich habe mich bemüht, den Anforderungen des entdeckenden Lernens bei der Entwicklung der Lernpfade zu entsprechen. Dieser Grundsatz konnte jedoch nicht in allen Teilen starr beibehalten werden, da nicht alle Teilbereiche des Themas „Brüche erweitern, kürzen und vergleichen" von Schülern einer 6. Klasse entdeckt werden können.[11] Zunächst soll nun das entdeckende Lernen dargestellt und charakterisiert werden.

3.2 Entdeckendes Lernen

Die mit dem Terminus „entdeckendes Lernen" bezeichneten, kognitionspsychologischen Überlegungen des Psychologen Jerome Bruner[12], die dafür kennzeichnend sind, dass „Informationen beim Lernen nicht nur aufgenommen und memoriert werden, sondern probeweise in Zusammenhänge gestellt, geordnet, auf Ursachen befragt, interpoliert und extrapoliert“ (Führer 1997: S. 59) werden sollten, versuchen die Intention und Grundlage des entdeckenden Lernens zu beschreiben und zu fassen. Für Bruner sei „Wissen [...] besser zu erinnern und zu nutzen, wenn man es schon bei der Aufnahme aktiv in Beziehungsnetze einlagere“ (Führer 1997: S. 59). Ein Unterricht, der dem entdeckenden Lernen entspricht, kann dieser Forderung nachkommen. In der Literatur findet man viele Begrifflichkeiten, die an das entdeckende Lernen erinnern. Zu nennen wären hierbei das „aktiv entdeckende Lernen" oder das „gelenkte Lernen" (vgl. Meyer 2007: S. 286) sowie die „entdecken(lassen)de Unterweisung“ (Führer 1997: S. 65). Somit ist es essentiell, einen Überblick darüber zu geben, was entdeckendes Lernen ausmacht und wie es im Unterricht angewandt werden soll.

[11] Als Beispiel wäre hier das Erweitern mit Null zu nennen, das ohne umfangreiche Exkurse nur schwer entdeckt werden kann.

[12] Die ersten Entwürfe und Überlegungen des entdeckenden Lernens gehen mindestens bis auf Dewey (1859–1952) zurück, dennoch wird Bruner (*1915) diese Forderung zugeschrieben (vgl. Führer 1997: S. 58).

3.2.1 Was ist entdeckendes Lernen?

Entdeckendes Lernen ist zunächst geknüpft an die Idee, dass Lernen nicht von außen herangetragen werden kann, sondern durch eigenes aktives Handeln geschieht (vgl. Winter 1989: S. 2). Der Lehrer sollte, auf diesem Wissen aufbauend, geeignete Lernumgebungen entwerfen, die den Schülern eigenverantwortliches Problemlösen, Explorieren und Experimentieren ermöglichen (vgl. Neber 2002: S. II 11; Seitenzählung nach Original, Anm. d. Verf.). Auf diese Weise kann bei den Schülern selbstständiges und forschendes Denken ausgebildet werden (vgl. Zocher 2000: S. 20) und kommt so mit der Forderung der von der Kultusministerkonferenz beschlossenen Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss nach anschlussfähigem (vgl. KMK 2004: S. 3) und selbstständigem Lernen (vgl. KMK 2004: S. 6) nach. Durch die rege Beteiligung der Schüler am Lernprozess erfolgt ein besserer Impuls für die vielen verschiedenen Schüleraktivitäten, die im Frontalunterricht nicht zum Zuge kommen, wie eigene Eindrücke sammeln und erleben, seinen Vermutungen und Fragen auf die Spur gehen können, um in Eigenregie deren Lösung zu entdecken und erforschen, diese dann in Zusammenhänge einzuordnen und zu verstehen und schlussendlich das so entstandene neue Wissen anwenden zu können (vgl. Kozdon 1977: S. 73).

Diese Faktoren umschreiben das entdeckende Lernen, können jedoch keine formal befriedigende Definition des Begriffs geben. In meinen Augen liegt die Hauptthese des entdeckenden Lernens darin, dass Lernen ein persönlicher, individueller Prozess ist, bei dem Verantwortung und Selbstständigkeit der Schüler Hand in Hand gehen (vgl. Zocher 2000: S. 31). Denn nur durch eigenständiges Herausfinden und Ausprobieren, durch emsiges Nachfragen und Überdenken, können Wissensinhalte vernetzt und ein entsprechender Transfer geleistet werden, so dass ein langfristiges Lernen möglich ist. Der Schüler muss das Wie und Warum selbst herausfinden, nur so braucht er das Entdeckte nicht in Frage zu stellen oder sich gar der Zauberei der Lehrer hinzugeben (vgl. Kozdon 1977: S. 22). Dabei wird vorausgesetzt, dass es verschiedene Wege und auch Irrwege gibt und der Schüler geeignete Impulse zur Lösung vorfindet. Ein anderer wesentlicher Aspekt des entdeckenden Lernens ist die Fokussierung auf den Schüler. Die Lehrkraft muss in der Lage sein, sich als Autorität zurückzunehmen und den Aktivitäten der Schüler Aufmerksamkeit und Interesse zu schenken, ihnen Hilfestellungen zu leisten, ihnen dabei aber gleichzeitig die nö-

tige entdeckerische Freiheit zu lassen (vgl. Winter 1989: S. 5), auch wenn nicht jeder einzelne Entdeckungsprozess sofort (Lern-)Erfolge verzeichnet. Deshalb ist die Vorstrukturierung und Reduzierung des zu behandelnden Lernstoffes durch die Lehrkraft unabdingbar und muss gleichzeitig doch so offen sein, spielerische Entdeckungen zu bieten. Dieses Verständnis vom entdeckenden Lernen als gelenktes Entdecken liegt meiner Arbeit zugrunde.

3.2.2 Der entdecken lassende Unterricht

Voraussetzungen

Entdeckendes Lernen hat immer noch nicht den Einzug in deutsche Schulen geschafft (vgl. Zocher 2000: S. 34). Vielleicht, weil bestimmte Anforderungen an die schulische Situation, seien es Räumlichkeiten oder Lehrpläne, an die Lehrkräfte und an die Schüler gestellt werden, die nicht ohne weiteres erfüllt werden können oder die die festgefahrenen Muster des schulischen Unterrichts nicht so einfach aufweichen können.

Die Voraussetzungen, die die *Schüler* für einen entdecken lassenden Unterricht mitbringen sollten, sind vielfältig. Ehrlichkeit ist eine dieser Eigenschaften, da der Schüler seine Ergebnisse selbst kontrollieren (vgl. Winter 1989: S. 4) und selbst einschätzen muss, wie viel er schon verstanden hat und wo noch Nachholbedarf besteht. Weiterhin gehören problembewusstes Denken und Handeln (vgl. Kozdon 1977: S. 32) und ein individuelles, zur Thematik passendes Vorwissen zu den, sicherlich idealisierten, Grundlagen. Zu diesen gehört letztlich auch eine erwachsene und reife Einstellung, die annimmt, dass beim Entdecken keine Aha-Erlebnisse zu erwarten sind, sondern dass diese didaktische Methode der Wissenserweiterung dient (vgl. Neber 2002: S. II 19; Seitenzählung nach Original, Anm. d. Verf.). Dies alles erscheint zwar plausibel, damit die Schüler effektiv entdeckend lernen können, aber zugleich werden ihnen Verhaltensweisen abverlangt, denen sie zumindest in unteren Jahrgängen nicht gerecht werden können.

Darum muss der *Lehrer* einige Vorkehrungen treffen, damit das entdeckende Lernen gerade untere Klassenstufen nicht überfordert. Dabei spielen vor allem Lenkungsmaßnahmen, wie spezielle Problemvorgaben oder auch entsprechende Kontrollfunktionen und Überprüfungsmöglichkeiten eine Rolle sowie die Fähigkeit, geeignete Impulse durch Aufgaben und Fragen zu setzen (vgl. Neber 2002: S. II 20). „Die Kunst besteht vor allem darin, Anstöße zum Selberfinden zu

geben“ (Winter 1989: S. 72) und nicht zu viel oder gar zu wenig vorzugeben. Mit Hilfen als Hilfen zum Selberfinden und mit lebensnahen und scheinbaren Alltagssituationen muss gearbeitet werden (vgl. Winter 1989: S 4.), damit ein nachhaltiger und größerer Lernerfolg (vgl. Kozdon 1977: S. 74) erreicht werden kann.

Im *schulischen Kontext* müsste Grundlegendes geändert werden, damit ein entdecken lassender Unterricht problemlos angewandt werden kann. Da nicht voraussagbar ist, wie lange die Schüler benötigen, bis eine zum Ergebnis führende Entdeckung gemacht ist, kann eine Eingrenzung in den 45 Minuten-Rhythmus nicht förderlich sein (vgl. Zocher 2000: S. 29). Auch die herkömmlichen Kriterien zur Bewertung und Benotung der Schüler passen nicht zu den Anforderungen des entdeckenden Lernens (vgl. Zocher 2000: S. 247), worauf ich später näher eingehen werde (siehe Abschnitt 3.2.2: S. 31). Meist lässt jedoch die Kompaktheit und Fülle des Lehrplans kaum einen Spielraum für zusätzliche entdeckerische Stunden im Schulalltag.

Dass nur Bestimmtes entdeckt werden kann, wie beispielsweise mathematische Regeln oder Naturgesetze und dass das zu Entdeckende zudem eindeutig und strukturiert sein sollte, damit unterschiedliche Meinungen zu keinen Irritationen führen (vgl. Führer 1997: S.65), sind die essentiellen Bedingungen und Eingrenzungen, die an den *Lernstoff* zu stellen sind.

Liest man die Voraussetzungen für einen entdecken lassenden Unterricht, wird schnell klar, dass „entdeckendes Lernen [...] folglich nicht rezeptartig vermittelt und weitergegeben werden [kann]“ (Zocher 2000: S. 352). Entdeckendes Lernen muss vorbereitet und geübt werden (vgl. Zocher 2000: S. 255).

Computergestützte Unterrichtskonzeption

Die Entwicklungen zum computergestützten Unterricht zeigen, dass entdeckendes Lernen bevorzugt angewandt und umgesetzt wird (vgl. Neber 2002: S. II 11; Seitenzählung nach Original, Anm. d. Verf.). Dennoch gibt es für den Verlauf im Unterricht Aspekte, die betrachtet werden sollten. Der Lehrer sollte sich von den typischen Phasen des entdeckenden Lernens, von der planvoll und konzentriert arbeitenden Phase, über die ratlose Phase bis zur planlos oder chaotisch arbeitenden Phase der Schüler (vgl. Zocher 2000: S. 28f.) nicht abschrecken lassen, sie charakterisieren das entdeckende Lernen und lassen den eigentlichen Lernprozess nicht von der Lehrkraft steuern (vgl. Neber 2002: S.

II 11; Seitenzählung nach Original, Anm. d. Verf.). Deshalb ist es gerade für die Gestaltung einer computergestützten Lernumgebung wichtig, den Eigenschaften des entdeckenden Lernens nachzukommen und geeignete Aktivitäten, durch die konstruktiv Wissen transformiert oder neu aufgebaut werden kann, bereitzustellen (vgl. Neber 2002: S. II 21; II 23; Seitenzählung nach Original, Anm. d. Verf.). Zocher geht hier noch weiter, indem sie beschreibt, dass eine reichhaltige Lernumgebung den Schülern die Möglichkeit bieten soll, erste tastende und spielerische Versuche und Beobachtungen mit dem Lernstoff zu erfahren (vgl. Zocher 2000: S. 26). Beide Komponenten zusammen ergeben einen durchaus vorstellbaren, theoretischen Überblick über eine solche computergestützte Unterrichtskonzeption.

Bewertung des entdecken lassenden Unterrichts

Die Bewertung und vor allem die Benotung eines entdecken lassenden Unterrichts passt nicht zu den herkömmlichen Kriterien (vgl. Zocher 2000: S. 247). Zum einen fehlt die vorausgesetzte Vergleichbarkeit. Entdeckendes Lernen beschreibt einen individuellen Prozess, der nur schwer verglichen werden kann (vgl. Winter 1989: S. 3). Zum anderen kann das Wissen um eine anschließende Bewertung den Entdeckungsprozess bremsen. Zwar sind auch gegenteilige Beobachtungen gemacht worden, dass Schüler die neue Lernsituation nur dann Ernst nehmen, wenn sie bewertet werden, trotzdem ist grundsätzlich die Bewertung eines persönlichen Denkprozesses so vielschichtig, dass sie einer Überarbeitung bedarf (vgl. Zocher 2000: S. 247).

3.2.3 Vorteile entdeckenden Lernens

Die Gründe, warum entdeckendes Lernen auch in den neueren Entwicklungen zum computergestützten Unterricht bevorzugt angestrebt und realisiert wird (vgl. Neber 2002: S. II 11; Seitenzählung nach Original, Anm. d. Verf.), sind vielfältig und sowohl psychologisch als auch praktisch begründet. Die mir wichtigsten sollen an dieser Stelle stichpunktartig genannt werden.[13]

- Dadurch dass sich der Schüler aktiv am Lernprozess beteiligt, verknüpft er mit dem Lernprozess emotionale Befindlichkeiten. Dazu zählen ebenso der Stolz, etwas durch eigenes Bemühen entwickelt oder entdeckt zu

[13] Eine Vielzahl an weiteren Vorzügen für das entdeckende Lernen gibt beispielsweise Kozdon (siehe Kozdon 1997: S. 20ff.).

haben sowie die Langeweile. Diese affektiven Momente im Lernprozess fördern das Verhältnis der Schüler zum Lehrstoff, auch für solche Schüler, die keine innere Beziehung oder großes Interesse zum Gegenstandsbereich haben oder haben wollen (vgl. Kozdon 1977: S. 23).

- Weiterhin trägt das aktive Engagement der Schüler am Lernprozess dazu bei, dass der Wissenszuwachs größer und geordneter ist. Vorhandenes Wissen wird durch entdeckendes Lernen umstrukturiert und mit neuen Ideen und Entdeckungen verknüpft. Auf diese Weise muss der Schüler Zusammenhänge erkennen und einordnen können, um zu neuem Wissen zu gelangen. Ein besseres Verständnis des Lernstoffes, höhere Transferleistungen sowie ein langfristiges Wissen sind die Folge (vgl. Kozdon 1977: S. 21).

- Die Lernfreude der Schüler kann durch die Freiheiten, die das entdeckende Lernen bietet, angeregt werden (vgl. Kozdon 1977: S. 25). Auf diese Weise können spielerische Tätigkeiten das kindliche Lernen unterstützen (vgl. Zocher 2000: S. 16) und die Lust am Lernen wird gesteigert.

- Der schulische Leistungs- und Erfolgsdruck wird abgebaut. Nicht mehr der Lehrer ist für die Leistung der Schüler hauptverantwortlich, sondern der Schüler, der einen großen Anteil an der Effektivität seiner eigenen Arbeitsweise trägt (vgl. Kozdon 1977: S. 25).

3.2.4 Nachteile entdeckenden Lernens

Dass entdeckendes Lernen noch nicht in den alltäglichen Schulablauf integriert ist, liegt an den nicht zu unterschätzenden Nachteilen dieser Lehr- und Lernform.[14] Im Folgenden werden einige dieser Nachteile aufgelistet.[15]

- Ein entdecken lassender Unterricht ist von hoher Zeitintensität und sollte daher stets im Gegensatz zu effektiveren Methoden gesehen werden, da im Schulalltag kaum ein zeitlicher Spielraum für freie Stunden zur

[14] Es ist fraglich, ob wirklich alle genannten Aspekte tatsächliche Nachteile darstellen oder ob es nur an Entschlossenheit und Ausdauer der Lehrer und Schüler fehlt, um diesen Sichtweisen den Rücken zuzukehren. Ähnlich beschreibt auch Führer, dass diese Argumente „in ‚fortschrittlichen' Pädagogen-, Verwaltungs- und Politikerkreisen als ‚wissenschaftlich überholt' [gelten]" (Führer 1997: S. 58). Diese Aussage wird von Führer zwar latent belächelnd dargestellt, trotzdem ist sie aussagekräftig genug.

[15] Eine Reihe an weiteren Nachteilen bietet Führer (vgl. Führer 1997: S. 61ff.).

Verfügung steht (vgl. Führer 1997: S. 61). Somit muss vom Schüler ein Mindesttempo im Aneignungsprozess gefordert werden, was gänzlich den so positiv wirkenden Freiheiten des entdeckenden Lernens widerspricht (vgl. Winter 1989: S. 3).

- Die Lehrkraft hat nur begrenzte didaktische Eingriffs- und Überprüfungsmöglichkeiten (vgl. Winter 1989: S. 4). Damit eng verbunden ist, dass die Schüler wirklich eigenständig die Inhalte entdecken müssen und nicht etwa die Überlegungen ihres Tischnachbarn übernehmen.

- Um die Schüler benoten und vergleichen zu können, wird ein vergleichbares Vorgehen vorausgesetzt, welches das entdeckende Lernen im Allgemeinen nicht bietet. Die Schüler zu benoten, auch ohne ihnen konkrete Lernziele vorzugeben, sondern ihnen freie Hand zu lassen, um dann einen persönlichen Prozess zu bewerten, erweist sich als äußerst problematisch (vgl. Winter 1989: S. 1; 3).

- Der Schüler kann nur schwer die Bedeutung des Lernstoffes abschätzen. Auch wenn eine strukturierte Vorauswahl durch den Lehrer getroffen wurde, muss der Schüler seinen eigenen, ganz persönlichen Lernprozess durchlaufen, um die Lernstoffauswahl auf wesentliche Beziehungen zu reduzieren (vgl. Winter 1989: S. 1; 3). Dieses Können ist vor allem in unteren Jahrgangsstufen fraglich.

3.2.5 Ziele des entdeckenden Lernens

Nach Neber kann ein Unterricht, der die Methodik des entdeckenden Lernens anwendet, folgende Ziele verwirklichen: Zunächst sind, in Übereinstimmung mit der Forderung der Kultusministerkonferenz nach vernetztem Lernen und Denken (vgl. KMK 2004: S. 3; 6), die erfolgreicheren Transferleistungen der Schüler nach einem selbstentwickelten Lerninhalt ein maßgebliches Ziel des entdecken lassenden Unterrichts (vgl. Neber 2002: S. II 12; Seitenzählung nach Original, Anm. d. Verf.).

Weiterhin erfährt für Neber das schulische Lernen eine Qualitätsteigerung, denn die vormals beherrschenden Lernleistungen, wie das Auswendiglernen oder die sture Anwendung unverstandener Algorithmen, werden dadurch verbessert, dass sich der Schüler dem Lerninhalt öffnen kann, also auch schwierige Wissensinhalte selbstständig erwerben kann. Er kann sich somit auch an neue,

unbekannte Problemstellungen heranwagen, um diese zu lösen und muss nicht aufgeben, weil kein passender vorgegebener Algorithmus bekannt ist (vgl. Neber 2002: S. II 12; Seitenzählung nach Original, Anm. d. Verf.).

Aus den von Neber genannten Zielen ergeben sich noch weitere, beispielsweise dass die Schüler das Hinterfragen erlernen sollen, mit dem sie ihr eigenes Geschafftes selbstkritisch überprüfen können.

3.2.6 Fazit

Zwar behauptet Winter, dass in der Schule nur vermeintlich von den Schülern selbstständig entdeckt werden kann (vgl. Winter 1989: S. 4), da der schulische Kontext zumindest hierzulande zu viele Grenzen aufzeigt, die ohne jede Steuerung durch Hilfen oder „Frage-Antwort-Spiele" (Winter 1989: S. 4) nur schwerlich zu überwinden sind; dennoch ist das Lernen, und insbesondere das Lernen der Mathematik, umso wirkungsvoller, je mehr man es durch eigenes, aktives Erfahren betreibt. Die logischen Verflechtungen innerhalb der Mathematik erlauben es, Lernen durch eigenes Erfahren möglich zu machen, so Winter. Deshalb muss es jeder Lehrer als didaktische Aufgabe sehen, das entdeckende Lernen bei möglichst vielen Schülern in Gang zu bringen (vgl. Winter 1989: S. 1–3). Als angehende Lehrerin nehme ich diese Herausforderung gerne an. Mit den vorliegenden Lernpfaden sollen sich die Schüler aktiv mit der Problemstellung „Brüche erweitern, kürzen und vergleichen" auseinandersetzen, um so die mathematischen Sachverhalte besser verstehen zu können und um so eine größere Einsicht in dieselben zu erlangen. Im Folgenden soll zunächst die rein didaktische Sichtweise der Bruchrechnung bezüglich der Bruchvorstellung, der Erweiterung, des Kürzens und des Größenvergleichs betrachtet werden.

Kapitel 4

Didaktik der Bruchrechnung

Und merk dir ein für allemal
Den wichtigsten von allen Sprüchen:
Es liegt dir kein Geheimnis in der Zahl,
Allein ein großes in den Brüchen.

Goethe[16]

Die Frage, ob Schüler das „Geheimnis der Brüche”, wie von Goethe genannt, überhaupt lüften können oder ob die Bruchrechnung ein „Auslaufmodell” ist, wie sie von Padberg bei seiner Argumentation für und gegen die Behandlung der Bruchrechnung in der Schule beschrieben wird (vgl. Padberg 2000: S. 5 oder Padberg 2002: S. 5), soll in der vorliegenden Arbeit nicht diskutiert oder gar beantwortet werden. Aber die Tatsache, dass die intensive Behandlung der Bruchrechnung in Klasse 6 bei vielen Schülern unbeliebt ist und war, sogar ein „Relikt aus längst vergangenen Tagen” (Padberg 2000: S. 5) zu sein scheint, stellt Lehrer vor die Herausforderung, dieses umfangreiche Lehrplanthema anders, effektiver und für Schüler besser zugänglich zu gestalten, um alle Vorteile[17] und jeden Nutzen dieses Auslaufmodelles herauszuarbeiten. Damit diese Aufgabe, der sich der vorliegende Lernpfad zu stellen versucht[18], gelingen kann, ist nach Winter aktiv-entdeckendes Lernen anzustreben. „Um dafür

[16] Zitiert nach Lautenbach 2004: S. 112.

[17] Padberg liefert einige dieser Notwendigkeiten der Bruchrechnung (siehe Padberg 2002: S. 8–16), ohne sich den gegenteiligen Argumenten zu entziehen (siehe Padberg 2002: S. 6–8).

[18] Der Lernpfad erfordert, dass sich die Schüler bereits ein fundiertes Verständnis zum Bruchzahlbegriff erschlossen haben. Die daraus folgende Darstellung des Bruchbegriffs mit dem Symbol der Bruchzahl wird ebenfalls vorausgesetzt. Allerdings bietet der Lernpfad zu Beginn eine kleine Wiederholung, die diese Aspekte aufnimmt. Dass die positive rationale Zahl als Wert eines Quotienten dargestellt werden kann, wird zudem als bekannt angenommen.

Voraussetzungen zu schaffen, ist es zunächst notwendig, die Vorstellung von der Bruchrechnung als einer Sammlung von Rechenverfahren und also einer eher langweiligen Durststrecke deutlich zu korrigieren, indem man die vielen Möglichkeiten wahrnimmt, interessante Problemstellungen zu finden und zu verfolgen" (Winter o. J: S. 14). Als daraus folgender, konsequenter Einstieg in die Bruchrechnung muss eine Fundierung des Bruchzahlbegriffes erfolgen,[19] die durch immer wieder neue, situative Kontexte die Schüler anregt, andere Blickwinkel einzunehmen (vgl. Kurth 1995: S. 20). Für eine tragfähige Bruchrechnung gibt es verschiedene Konzepte, die im Folgenden behandelt werden.

4.1 Konzepte zur Behandlung der Bruchrechnung

Der Bruchzahlbegriff beinhaltet viele Komponenten, so dass eine Übersicht über den Aufbau der Rechenoperationen der Menge der positiven rationalen Zahlen auf verschiedenen Abstraktheitsstufen erfolgen kann (vgl. Stein 2004: Bruchrechnung → Theorie)[20]. Nach Padberg gibt es dafür vier grundlegende Konzepte: das Größenkonzept, das Äquivalenzklassenkonzept, das Gleichungskonzept und das Operatorkonzept (vgl. Padberg 2002: S. 17).[21]

Aus didaktischer Sicht ist dabei anzumerken, dass eine getrennte Anwendung der einzelnen Konzepte im Unterricht kaum möglich und nicht empfehlenswert ist, da, um ein tragfähiges Gesamtkonzept realisieren zu können und um das Verständnis darüber, was ein Bruch „ist" von Grund auf aufzubauen, inhaltliche Verknüpfungen zwischen den verschiedenen Konzepten vorausgesetzt werden und notwendig sind (vgl. Stein 2004: Bruchrechnung → Konzepte zur Bruchrechnung → Theorie).

[19] Im Folgenden wird nur an solchen Stellen zwischen einem Bruch und einer Bruchzahl unterschieden, an denen es sonst zu Missverständnissen führt.

[20] Um nicht alle Links des Projektes MaDiN zur Didaktik der Bruchrechnung (vgl. Stein 2004: Bruchrechnung) aufführen zu müssen, erfolgt die Zitation von Stein anders als bisher. Dabei werden anstatt einer Seitenzahl die zu durchlaufenden Links angegeben.

[21] Stein fügt hier ein weiteres Konzept, das formale Konzept ein. Dieses baut komplett auf dem Äquivalenzklassenkonzept auf, versucht jedoch die formale Behandlung der Bruchrechnung nur mittels der Kenntnis der natürlichen Zahlen durchzuführen (vgl. Stein 2004: Bruchrechnung → Konzepte zur Bruchrechnung → Formale Theorie → Theorie).

4.1.1 Größenkonzept

Beim Größenkonzept wird zwischen Bruchzahlen und konkreten Größen aus dem Alltag wie $\frac{1}{2}$Meter oder $\frac{3}{4}$Liter ein für die Schüler besonders verständlicher Zusammenhang hergestellt. Dabei wird nicht theoretisch zwischen den gewählten Größen wie $\frac{1}{3}$Pizza und dem Repräsentant $\frac{1}{3}$ unterschieden, vielmehr wird dieser dann unmittelbar zur Veranschaulichung der Bruchzahl eingesetzt. Da die Schüler Bruchzahlen als Maßzahlen bereits aus der Grundschule kennen, eignet sich dieses Konzept zur Einführung der positiven rationalen Zahlen und zur Entwicklung der Rechenregeln – außer der Multiplikation und Division. (vgl. Stein 2004: Bruchrechnung → Konzepte zur Bruchrechnung →Größenkonzept → Theorie)

4.1.2 Äquivalenzklassenkonzept

Bruchzahlen können zu Äquivalenzklassen zusammengefasst werden. Dabei bündelt man gleichwertige Brüche zu einer Menge. Bei diesem Konzept ist beispielsweise die Bruchzahl $\frac{3}{4}$ die Äquivalenzklasse $\left[\frac{3}{4}\right] = \left\{\frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \frac{9}{12}, \frac{12}{16}, \ldots\right\}$ oder, allgemeiner gesagt, die Bruchzahl $\frac{m}{n}$ gehört zu folgender Äquivalenzklasse

$$\left[\frac{m}{n}\right] = \{(a, b) \,|\, a, b \in \mathbb{N} \wedge m \cdot b = n \cdot a\}.$$

(vgl. Stein 2004: Bruchrechnung → Konzepte zur Bruchrechnung → Äquivalenzklassenkonzept → Theorie)

Hintergrund dieses Konzeptes ist die Definition einer Relation $(a, b) \sim (c, d) :\Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$ in der Menge der geordneten Paare in den natürlichen Zahlen. Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation, da sie reflexiv, transitiv und symmetrisch ist. Weil es für jede Äquivalenzrelation möglich ist, diese in Äquivalenzklassen aufzuteilen, ergeben sich für Bruchzahlen mit dem gleichen Wert die oben beschriebenen und definierten Äquivalenzklassen (vgl. Padberg 2002: S. 19).

Dieses Konzept ist zunächst völlig abseits der schulischen Wirklichkeit zu sehen, da wichtige didaktische Positionen, wie die Forderung, an das Vorwissen der Schüler anzuknüpfen oder neue Themen und Begriffe motivierend einzuführen und nur ganz zuletzt zu formalisieren, bei diesem Konzept kaum berücksichtigt werden (vgl. Padberg 2002: S. 20). Postel argumentiert hier, dass auch in der Bruchrechnung der Schüler zum Selbstentdecken angeregt werden

soll, und schließt damit die Verwendung dieses Konzeptes zumindest in den grundlegenden Anfangsstunden aus (vgl. Postel 1981: S. 16).

4.1.3 Gleichungskonzept

Durch Lösen der linearen Gleichung $n \cdot x = m$ mit m, n aus den natürlichen Zahlen erhält man zunächst das Ergebnis $x = m : n$, dass dann in Beziehung zu der Bruchzahl $\frac{m}{n}$ gesetzt werden kann (vgl. Padberg 2002: S. 21).

Auch wenn es nach Stein sicher sinnvoll ist, die Erweiterung der Menge $\mathbb{N}$ zur Menge $\mathbb{Q}^+$ über die Unlösbarkeit einer Gleichung wie beispielsweise $2 \cdot x = 3$ für $x \in \mathbb{N}$ zu motivieren (vgl. Stein 2004: Bruchrechnung → Konzepte zur Bruchrechnung → Gleichungskonzept → Theorie), fallen doch einige Mängel auf, wie die hohe Formalisierung oder die große Distanz zur Anwendung der Bruchzahlen als Maßzahlen von Größen (vgl. Padberg 2002: S. 22f.). Somit ist der Gebrauch dieses Konzeptes für den Schulgebrauch nicht sinnvoll und sogar unbrauchbar (vgl. Padberg 2002: S. 31).

4.1.4 Operatorkonzept

Das letzte Konzept zur Behandlung der Bruchrechnung ist das Operatorkonzept. Kurzgefasst werden dabei Bruchzahlen als Funktionen bzw. Operatoren aufgefasst. Padberg unterscheidet drei verschiedene Varianten des Operatorkonzeptes: Die Identifikation der Bruchzahlen mit den Bruchoperatoren bildet die erste Variante, die Bruchoperatoren als Modell für die Bruchzahlen, so dass diese durch Abstraktion gewonnen werden können, die zweite Variante. Zuletzt die dritte Variante, die den Zusammenhang mit den Größen einbindet, ihn nicht mehr isoliert. Im Folgenden soll das Konzept im Sinne der zweiten Variante abgehandelt werden.[22]

Bei dieser Variante des Operatorkonzeptes besteht ein Bruchzahloperator, beispielsweise veranschaulicht durch $\rangle \cdot \frac{m}{n} \langle$, aus der Verknüpfung eines Multiplikationsoperators mit einem Divisionsoperator. Einzeln betrachtet bewirkt der Multiplikationsoperator $\rangle \cdot m \langle$ bei einer Eingabe eines Stabes mit gegebener Länge in die zugehörige Maschine, dass dieser Stab auf die m-fache Länge gebracht wird und von der Maschine ausgegeben wird. Bei Eingabe eines Stabes in den Divisionsoperator $\rangle : n \langle$ teilt nun die Maschine den Stab in genau

[22]Der gesamte Absatz bezieht sich auf Padberg (vgl. Padberg 2002: S. 23f.).

n gleichlange Teile, wobei nur eines davon von der Maschine ausgegeben wird. Durch Verkettung dieser beider Operatoren entsteht somit der Bruchzahloperator $\left]\cdot\frac{m}{n}\right[$ (vgl. Stein 2004: Bruchrechnung → Konzepte zur Bruchrechnung → Operatorkonzept → Theorie).[23]

Auch dieses Konzept, das sich zwar als einheitlicher Ansatz zur Behandlung der Bruchrechnung erwiesen hat und mit dessen Voraussetzungen die Multiplikation und Division von Brüchen einführbar sind, eignet sich nicht isoliert für den Einsatz im Unterricht (vgl. Padberg 2002: S. 31).

4.2 Bruchzahlaspekte

Den vorgestellten Konzepten zur Behandlung der Bruchrechnung liegen, wie eingangs erwähnt, verschiedene Komponenten des Bruchzahlbegriffs zugrunde. Diese Konzepte sind wichtig für die Bruchrechnung, so dass Jahnke folgert, dass die meisten Fehler in der Bruchrechnung nur durch ein mangelndes Bruchzahlverständnis entstehen (vgl. Jahnke 1995: S. 5).

Nachdem im Folgenden die Grundvorstellung von Brüchen als Teil vom Ganzen herausgearbeitet wurde, werden einige weitere Bruchzahlaspekte stichpunktartig aufgezeigt.

4.2.1 Teil vom Ganzen

Aus den Vorstellungen „Bruch als Teil eines Ganzen" und „Bruch als Teil mehrerer Ganzer" setzt sich der Aspekt „Teil vom Ganzen", auch Größenaspekt genannt, zusammen. Diese beiden Grundvorstellungen sind völlig gleichwertig und als zentrale Voraussetzung dafür zu sehen, dass im weiteren Verlauf der Bruchrechnung nicht die Fülle an Fehlern gemacht werden, wie sie von Padberg beschrieben werden (vgl. Padberg 2000: S. 12ff.). Die Vorstellung von einem „Bruch als Teil eines Ganzen" ist für Schüler meist leichter verständlich und auf der ikonischen Ebene lässt sich damit ein handlungsnahes Verständnis erzielen (vgl. Padberg 2002: S. 44). Doch obwohl empirische Befunde belegen, dass die Kenntnis dieser Vorstellung bei den Schülern größer ist (vgl. Padberg 2002: S. 48), ist dennoch die Vertrautheit mit *beiden* Grundvorstellungen zu schwach. Somit sollte eine Verbesserung der Bruchrechnung durch eine bessere, schüler-

[23]Für einen ausführlicheren, rein formalen Aufbau des Operatorkonzepts siehe Padberg (2002: S. 24ff.).

gerechte Lehre dieses Fundaments „Teil vom Ganzen” erfolgen (vgl. Padberg 2002: S. 49f.).

Teil eines Ganzen

Abbildung 4.1 zeigt, wie Postel (vgl. 1981: S. 29) und Padberg (vgl. 2002: S. 47) die hinter der Grundvorstellung „Bruch als Teil eines Ganzen” stehende Rechnung veranschaulichen.

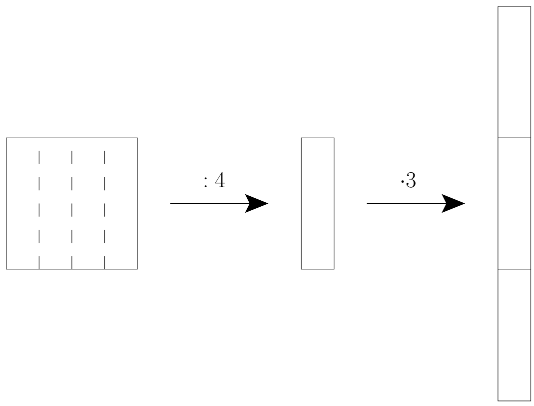


Abbildung 4.1: Bruch als Teil eines Ganzen (vgl. Padberg 2002: S. 47).

Die Rechnung besagt demnach: $\frac{3}{4}$ eines Quadrates erhält man, indem man das Quadrat in vier gleichgroße Stücke teilt und eines dieser Stücke verdreifacht.

Teil mehrerer Ganzer

Bei der zweiten Grundvorstellung muss der Schüler erkennen, dass mehrere Ganze zusammen das neue Ganze bilden. Dabei heißt $\frac{3}{4}$Quadrate bei dieser Vorstellung, dass man drei Quadrate in vier gleichgroße Teile teilt und anschließend eines dieser Teile betrachtet. Abbildung 4.2 auf der nächsten Seite zeigt die zugehörige Veranschaulichung: Im Gegensatz zur ersten Grundvorstellung muss man hier also zuerst vervielfachen und dann teilen.

4.2.2 Weitere Aspekte

Die weiteren Bruchzahlaspekte können kaum getrennt betrachtet werden und überschneiden sich mit dem Aspekt „Teil vom Ganzen” sowie untereinander. Die vorliegenden Aspekte wurden nach Tragfähigkeit für den Aufbau der

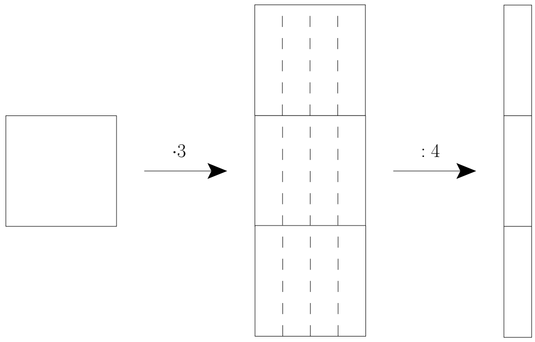


Abbildung 4.2: Bruch als Teil mehrerer Ganzer (vgl. Padberg 2002: S. 47).

Bruchrechnung ausgewählt, wobei der bereits beschriebene Aspekt „Teil vom Ganzen" der grundlegendste ist (vgl. Padberg 2002: S. 38).

- *Maßzahl*
  Der Aspekt der Maßzahl ist eng mit dem des „Teil vom Ganzen" verknüpft, da als Ganzes an dieser Stelle eine Größeneinheit betrachtet wird. Hierbei werden Brüche als Bezeichnungen von Größen eingesetzt wie $\frac{3}{4}$h oder $\frac{1}{2}$km (vgl. Postel 1981: S. 17).

- *Operator*
  Durch Verifizierung des Maßzahlaspektes, indem man deutet, dass auf die Größeneinheit ein Operator angewandt wird, erhält man den Operatoraspekt. Beispielsweise legt man $\frac{3}{4}$ von 1kg so aus, dass 1kg erst durch 4 dividiert wird. Das Ergebnis wird anschließend mit 3 multipliziert. Weigand / Vollrath weisen weiterhin auf folgende Schreibweise hin.

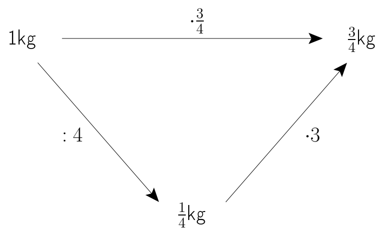


Abbildung 4.3: Operatorkonzept (vgl. Weigand / Vollrath 2007: S. 47).

- *Quotient*
  Aus algebraischer Sicht können Brüche als Quotienten natürlicher Zahlen betrachtet werden. Dabei gilt $m : n = \frac{m}{n}$ mit $m,\ n \in \mathbb{N}$. Möchte man 3 Tafeln Schokolade gerecht an 4 Kinder verteilen, so teilt man jede

Tafel durch 4 und gibt jedem Kind 3 Stücke. Jedes Kind erhält so $\frac{3}{4}$ der Schokolade und es gilt $3 : 4 = \frac{3}{4}$ (vgl. Weigand / Vollrath 2007: S. 47).

- *Lösung einer linearen Gleichung*
  Bei diesem Aspekt treten Brüche als Lösungen von linearen Gleichungen auf, so löst beispielsweise $\frac{7}{9}$ die Gleichung $9 \cdot x = 7$ (vgl. Weigand / Vollrath 2007: S. 47).

- *Skalenwert*
  Bei einem Wasserstand von $\frac{1}{2}$m bezeichnet der Bruch $\frac{1}{2}$ eine genaue Stelle auf einer Skala, dabei spricht man vom sogenannten Skalenwertaspekt (vgl. Postel 1981: S. 18).

In der Literatur werden noch weitere Aspekte genannt. Padberg führt beispielsweise den Verhältnisaspekt ein, bei dem Brüche als Verhältnisse dienen, wie sie im alltäglichen Leben vorkommen, wie bei Wahrscheinlichkeiten oder Maßstäben. Außerdem ergänzt er noch den Quasikardianalitätsaspekt, wobei eine etwas andere Bruchschreibweise von $\frac{3}{4}$ in der Form 3 Viertel als Analogie zum Einsatz von 3 als Kardinalzahl zu verstehen ist (vgl. Padberg 2002: S. 35–36). Postel beschreibt zusätzlich den Relationsaspekt und verwendet dafür das Beispiel, dass Fleisch aus $\frac{2}{3}$ Wasser besteht (vgl. Postel 1981: S. 17).

Kurth unterstreicht im Zusammenhang mit der Lehre der Bruchrechnung, dass die Bruchzahlaspekte so für die Schüler in den Unterricht integriert sein sollten, dass die Alltagserfahrungen der Schüler ausreichen, um die dargestellten Aufgaben oder Übungen bewältigen zu können. Als besonders vorteilhaft stellt sich für Kurth dabei das gerechte (Auf-)Teilen heraus. Dieses kann formale Zusammenhänge auch inhaltlich illustrieren, indem es den Bruchzahlbegriff in ein komplettes Gefüge aus Verhältnisaspekt, Größenaspekt und Anteilaspekt eingliedert (vgl. Kurth 1995: S. 20f.). Aufbauend hierauf schlägt Kurth vor, dass ausgehend vom gerechten Teilen die Rechenregeln von den Schülern entdeckt werden, die später dann unter den Termini Erweitern und Kürzen genauer definiert werden können (vgl. Kurth 1995: S. 49). Das Erweitern und Kürzen soll nun näher betrachtet werden.

4.3 Erweitern / Kürzen

„Erweitern und Kürzen ergeben sich ohne Schwierigkeiten aus der Vorstellung vom Teil eines Ganzen. Erweitern läuft auf Verfeinerung, Kürzen auf Vergröberung der Einteilung hinaus" (Weigand / Vollrath 2007: S. 47). Damit dies auch „ohne Schwierigkeiten" gelingt, müssen im Unterricht zunächst gründliche anschauliche Fundamente gelegt werden. Um diese jedoch verstehen zu können, benötigen Schüler spezielle Vorkenntnisse[24] und die Vorstellung zur Gleichwertigkeit von Brüchen (vgl. Padberg 2002: S. 57).

4.3.1 Anschauliche Wege zum Erweitern / Kürzen

Die Einsicht, dass ein und dieselbe Größe durch verschiedene Brüche ausgedrückt werden kann, dient als Grundlage, um schülergerechte Veranschaulichungen zum Erweitern bzw. Kürzen zu finden und zu gestalten.

Padberg schlägt eine Erarbeitung an den Flächen von Rechtecken und Kreisen[25] sowie an Strecken vor. Im weiteren Verlauf sollte jedoch auch die enaktive Ebene angesprochen werden[26], als Medium hierfür eignen sich nach Padberg Blätter, die einen markierten Bruchteil besitzen. Durch Falten dieser Blätter bleibt dieser Bruchteil gleich, die Unterteilungen des Blattes und insbesondere des Bruchteils verändern sich. Postel hebt hervor, dass die Schüler erst auf der ikonischen, also bildhaften Ebene mit Hilfe des Maßzahlaspektes agiert und Einsicht gefunden haben sollten, bevor auf die symbolische Ebene übergegangen werden kann (vgl. Postel 1981: S. 28). Diese Ebene ist beispielsweise dadurch motiviert, dass verschiedene Brüche in Zusammenhang mit Größen vorgegeben werden und diese von den Schülern in eine kleinere Einheit umgerechnet werden sollen: $\frac{3}{5}$m = 60cm, $\frac{6}{10}$m = 60cm, usw. (vgl. Padberg 2002: S. 59–65) Streefland bietet hier eine variationsreiche und originelle Idee von

[24] Malle beklagt hier, dass es an verschiedenen anschaulichen Vorstellungen mangelt und fordert, dass in jedem Heft Torten- und Schokoladenmodelle zu finden sein müssen (vgl. Malle 2004: S. 4).

[25] Ein vom deutschen Bildungsserver vorgeschlagenes Arbeitsheft für Schüler erarbeitet die komplette Bruchrechnung mit sogenannten „Bruchrechenkreisen". Auch wenn diese einseitige Betrachtung zu Missverständnissen führen kann, regt es doch „durch anschauliche, leicht fassliche Erklärungen [...] die Schülerin/den Schüler zu eigenständigem, handlungsorientiertem Lernen [an]. Denn erst wer etwas selbst ausprobiert hat, wird es auch wirklich verstehen!" (DBS 2002: Mathe mit Fuchs, o. S.).

[26] Malle fordert explizit, da nur durch Anschauung das Lernen von Brüchen etwas bringen kann, dass der Bruchrechenunterricht in zwei Phasen aufgeteilt sein sollte, die inhaltlich-anschauliche und die formal-regelhafte Phase (vgl. Malle 2004: S. 4).

gerechten Tischordnungen in einer Pizzeria an (vgl. Streefland 1995: S. 8ff.), die den Verhältnisaspekt mit dem allgemeinen Bruchzahlbegriff verknüpft und durch die motivierende Aufgabenstellung individuelle Lösungswege der Schüler erreicht, die in deren Erinnerung verankert bleiben (vgl. Padberg 2002: S. 64f.).

Zusammenfassend gilt, dass die Gleichwertigkeit konkreter Brüche zunächst nur anschaulich erarbeitet werden sollte, bevor Begriffe oder Rechenregeln formuliert werden (vgl. Padberg 2002: S. 65).

4.3.2 Systematische Behandlung von Erweitern / Kürzen

Erweitern

Die systematische Behandlung des Erweiterns stellt sich nach Verfestigung der Anschauungen[27] die Frage, wie man sich von den Brüchen als Repräsentanten von Größen, also ohne Rückgriffe auf Veranschaulichungen, lösen kann, um direkt anhand der gegebenen Brüche zu entscheiden, ob diese gleichwertig sind. Dabei hilft zunächst noch das Größenkonzept, das visualisiert, wie beispielsweise bei einem gegebenen Rechteck durch Verfeinerung der Unterteilungen der Bruch sich wegen der Vermehrung der Unterteilungen ändert, der Bruchteil jedoch gleichbleibt. Mit mehreren Beispielen kann somit auf den Vorgang des Erweiterns eingegangen und eine Regel herausgefunden werden, so dass man sich von den Anschauungen lösen kann (vgl. Padberg 2002: S. 65f.). Malle weist hierbei darauf hin, dass in dieser frühen Phase des Formal-Regelhaften noch keine Termini verwendet werden sollten, damit die Schüler die Rechnung verstehen und sich nicht nur einen Algorithmus zur Definition von Erweitern oder auch Kürzen merken (vgl. Malle 2004: S. 6). Mit der Aussage $\frac{m}{n} = \frac{m \cdot k}{n \cdot k}$ für alle k, m, n aus den natürlichen Zahlen erhält man ausgehend von einem Bruch $\frac{m}{n}$ beliebig viele aber gleichwertige Brüche (vgl. Padberg 2002: S. 66). Nachdem dies verstanden wurde, kann auch der Begriff des Erweiterns in Sinne einer Verfeinerung eingeführt werden (vgl. Malle 2004: S. 6).

Für das anschließende Üben sind variationsreiche Aufgabenstellungen und

[27]Hier sind die bildhaften und greifbaren Anschauungen durch Rechtecke, Kreise und Strecken gemeint, die beispielsweise bei der Gewinnung der Einsicht, dass sich ein und dieselbe Größe durch verschiedene konkrete Brüche darstellen lässt, von Nutzen sind.

verschiedene Aufgabentypen wichtig.[28]

Kürzen

Während die oben beschriebene Verfeinerung einer gegebenen Unterteilung zumindest theoretisch beliebig oft durchgeführt werden kann, lässt sich eine Vergröberung nur im begrenzten Umfang realisieren (vgl. Padberg 2002. S. 67).

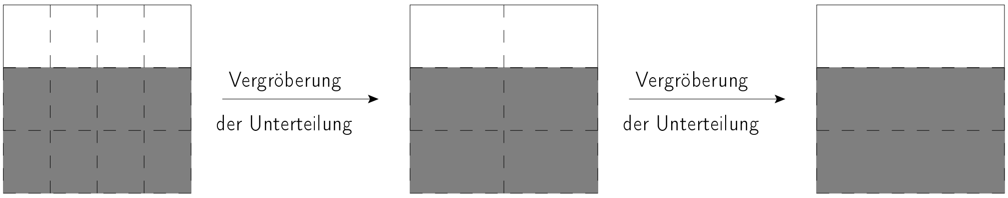


Abbildung 4.4: Kürzen (vgl. Padberg 2002: S. 68).

Die Abbildung 4.4 veranschaulicht, dass ein weiteres Vergröbern nicht möglich ist: Würde man eine weitere Unterteilung entfernen, könnte man den gefärbten Bruchteil nicht mehr eindeutig benennen können. Wie bei der systematischen Behandlung des Erweiterns führen auch hier anschauliche Beispiele zu der Erkenntnis, dass dem Vergröbern der Unterteilung dem Dividieren des Zählers und des Nenners mit derselben natürlichen Zahl entspricht. Es gilt $\frac{m}{n} = \frac{m:k}{n:k}$ für alle m, n aus den natürlichen Zahlen und für alle k, die sowohl Teiler von m als auch von n sind. Die Einführung des Begriffs Kürzen ist genauso zu überlegen, wie die des Terminus Erweitern (vgl. Padberg 2002: S. 68). Als weiteres Lernziel ist zu erreichen, dass man Brüche vollständig kürzen kann, das heißt, dass es keinen weiteren gemeinsamen Teiler von Zähler und Nenner außer 1 mehr gibt und der Bruch damit in seine Grundform überführt wurde. Diesen vollständig gekürzten Bruch nennt man auch Kernbruch. Um vollständig Kürzen zu können, gibt es im Grunde zwei Möglichkeiten: Kennt man den größten gemeinsamen Teiler von Zähler und Nenner, dann kann in einem Schritt gekürzt werden, andernfalls kann man schrittweise kürzen, indem man nacheinander mit gemeinsamen Teilern von Zähler und Nenner kürzt (vgl. Padberg 2002: S. 68).

[28]Verschiedene Aufgabentypen bietet Padberg selbst an (vgl. Padberg 2002: S. 66f.), weitere sind außerdem in vielen Arbeitsheften für Schüler der 6. Jahrgangsstufe zu finden wie beispielsweise im Arbeitsheft „Mathematik aktuell" (vgl. Schillinger 2007: S. 8). Da der vorliegende Lernpfad diesen Hinweis versucht aufzunehmen, werden die verwendeten Aufgabentypen an späterer Stelle (siehe 6.1.6 Station Übungen zum Erweitern, S. 68) erklärt.

Wie beim Erweitern erfordert ein tieferes Verständnis für das Kürzen variationsreiche Übungsaufgaben und Spiele (vgl. Padberg 2002: S. 69).

Folgerungen aus Erweitern / Kürzen

Malle hebt hervor, dass eine weitere Grundvorstellung den Schülern vermittelt werden sollte: Sind Erweitern und Kürzen eingeführt, muss folgen, dass Erweitern die Umkehrung von Kürzen ist und umgekehrt (vgl. Malle 2004: S. 5f.). Weiterhin sollte der Unterschied, dass man jeden Bruch mit jeder beliebigen Zahl erweitern kann, einen Bruch aber ausschließlich mit gemeinsamen Teilern von Zähler und Nenner kürzen kann, herausgearbeitet werden. Eine weitere Schlussfolgerung, die für die Schüler nicht selbstverständlich ist, obwohl sie diese bestenfalls als Einstieg in die Bruchrechnung betrachtet haben, ist, dass man „*ein und dieselbe* Größe durch *verschiedene* konkrete Brüche benennen [kann]" (Padberg 2002: S. 59, Hervorhebung im Original, Anm. d. Verf.) und dass das Erweitern und Kürzen nur den Namen, nicht die Bruchzahl verändert (vgl. Padberg 2002: S. 69).

Sind all die aufgeführten Aspekte didaktisch sinnvoll umgesetzt, beantwortet sich die zu Beginn der systematischen Behandlung des Erweiterns gestellte Frage. Demzufolge kann man direkt an den Brüchen erkennen, ob sie äquivalent sind, und zwar in zweierlei Richtungen: zum einen sind Brüche gleichwertig, wenn sie durch Kürzen in denselben Kernbruch übergehen und zum anderen, wenn für zwei Brüche $\frac{m}{n}$ und $\frac{p}{q}$ gilt, dass $m \cdot q = n \cdot p$ (vgl. Padberg 2002: S. 69).

4.4 Größenvergleich

4.4.1 Anschauliche Wege zum Größenvergleich

Die Entscheidung, welcher von zwei gegebenen Brüchen der Größere ist, kann in der gemeinen Bruchrechnung nicht so einfach erfolgen. Deshalb schlagen sowohl Padberg (vgl. Padberg 2002: S. 74f.) als auch Postel (vgl. Postel 1981: S. 30) eine Einführung des Größenvergleichs mit Brüchen auf der Grundlage des Größenkonzeptes vor. Die wichtigsten Regeln in Verbindung mit dem Größenkonzept sollen nun kurz vorgestellt werden.[29]

[29]Für ausführliche Beispiele siehe Padberg (vgl. Padberg 2002: S. 75ff.).

So lässt sich die *erste Grundvorstellung* vom „Bruch als Teil eines Ganzen” auf den Vergleich mit Stammbrüchen wie auch auf den Vergleich mit gleichnamigen Brüchen anwenden. Ferner kann diese Vorstellung mit der Verknüpfung durch die kombinierte Betrachtung von Zähler und Nenner beispielsweise dann angewandt werden, wenn $\frac{3}{8}$ mit $\frac{4}{7}$ verglichen werden sollen. Hierbei ist die Größe der Bruchstücke und die Anzahl der Teile bei dem Bruch $\frac{4}{7}$ größer (vgl. Padberg 2002. S. 75f.).

Die *zweite Grundvorstellung* dagegen hilft bei einem Vergleich von beliebigen Brüchen mit gleichem Zähler. Beispielsweise wird die Ungleichung $\frac{2}{5} < \frac{2}{3}$ verifiziert mit der Überlegung, dass das Ergebnis *einer* Strecke der Länge 2cm geteilt in 5 Teile kleiner ist als das *einer* Strecke mit der Länge 2cm geteilt in 3 Teile (vgl. Padberg 2002: S. 75). Unumgänglich für diese Vorgehensweise ist eine rege Vertrautheit der Schüler mit beiden Grundvorstellungen. Diese kann bei dem Größenvergleich noch weiter verfestigt werden und bietet die Möglichkeit, den Größenvergleich nicht nur schematisch durchzuführen. Daher sollte dieser Phase besondere Aufmerksamkeit gewidmet werden (vgl. Padberg 2002. S. 76).

Der Zahlenstrahl eignet sich gut, um diese Regeln zu veranschaulichen, sollte aber nicht zu früh herangezogen werden. Weiterhin können Unterschiede zwischen den natürlichen Zahlen und den Bruchzahlen sowie die dichte Lage der Bruchzahlen von den Schülern durch geeignete Impulse herausgefunden werden (vgl. Padberg 2002. S. 83–85).

An dieser Stelle weist Padberg ausdrücklich daraufhin, dass die Schüler diese Strategien zum Größenvergleich möglichst selbstständig entdecken sollen (vgl. Padberg 2002: S. 78), was nach Profke sicherlich für den gesamten Mathematikunterricht gilt, da dieser einsichtiges Lernen zum Ziel hat, welches das menschliche Grundbedürfnis des „verstehen Wollens” befriedigen soll (vgl. Profke 1991: S. 154).

4.4.2 Systematische Behandlung des Größenvergleichs

Nach dem eben Beschriebenen sollte im Unterricht zu einem systematischen Größenvergleich übergegangen werden.

Regel für Brüche mit gleichem Zähler

Padberg führt keine spezielle Regel für den Vergleich von Brüchen mit dem gleichen Zähler ein, da diese sich einfacher und unmittelbar aus den Überlegungen mit den Grundvorstellungen „Teil eines Ganzen" und „Teil mehrerer Ganzer" ergibt. Dennoch soll diese Regel erwähnt werden.

Für alle Brüche $\frac{m}{n}$ und $\frac{m}{q}$ gilt:

$$\frac{m}{n} < \frac{m}{q} \text{ genau dann, wenn } q < n$$

Regel für gleichnamige Brüche

Der Vergleich von gleichnamigen Brüchen lässt sich leicht nachvollziehen, da sich diese Regel ebenfalls aus den vorherigen anschaulichen Überlegungen ableiten lässt.

Für alle Brüche $\frac{m}{n}$ und $\frac{p}{n}$ gilt:

$$\frac{m}{n} < \frac{p}{n} \text{ genau dann, wenn } m < p$$

Regel für beliebige Brüche

Die erste, auf beliebige Brüche immer anwendbare Möglichkeit ist, die Brüche auf einen gemeinsamen Nenner zu bringen und dann die Brüche nach der zuvor definierten Regel für gleichnamige Brüche zu vergleichen. Der kleinstmögliche gemeinsame Nenner wird Hauptnenner[30] genannt. Die Anleitung zum Vergleich über den Hauptnenner sollte aber keineswegs verfrüht eingeführt werden, da diese Methode in speziellen Einzelfällen nicht immer optimal ist, obwohl sie stets funktioniert. Daher sollte dieses Verfahren den Schülern nur als eines von mehreren Möglichen gelehrt werden (vgl. Padberg 2002: S. 75).

Weitere Verfahren, die der Frage nach dem Größeren von zwei gegebenen Brüchen nachkommen, lassen sich nach Winter durch mindestens zwei verschiedene Wege angeben.[31] Ein möglicher Weg wäre, die Zähler zu erweitern

[30] Für Hinweise und Regeln, wie der Hauptnenner zu bestimmen ist, siehe Padberg (vgl. Padberg 2002. S. 79).

[31] Winter bietet hier noch drei weitere Möglichkeiten an. Während die Strategie über den Hauptnenner bzw. über einen gemeinsamen Nenner die Brüche zu vergleichen bereits vorgestellt wurde, erwähnt er zusätzlich das Umwandeln der zu vergleichenden Brüche in Dezimalbrüche und das Ausnutzen der Monotoniegesetze (vgl. Winter 1976: S. 145). Diese beiden Bruchzahlvergleichsmöglichkeiten bieten sich m. E. jedoch noch nicht für die anfängliche einführende Betrachtung des Größenvergleichs von Brüchen an.

bis sie gleich sind und dann nach vorstehender Regel für Brüche mit gleichem Zählern zu vergleichen. Die Brüche auf bereits bekannte zurückzuführen und anschließend zu entscheiden, welcher der Brüche größer ist, ist der zweite Vorschlag, den Winter angibt. Ein Beispiel hiefür wäre folgendes:

Überprüfe folgende Aussage $\frac{13}{23} < \frac{17}{27}$. Lösungsidee nach Winter: Da aus $1 - \frac{13}{23} = \frac{10}{23}$ und $1 - \frac{17}{27} = \frac{10}{27}$ zusammen mit der Regel für Brüche mit gleichem Zähler folgt, dass $\frac{10}{27} < \frac{10}{23}$, ist die Aussage wahr (vgl. Winter 1976: S. 145). Allerdings ist ein tiefes Verständnis der Schüler notwendig, bis sie von selbst auf diesen Lösungsweg kommen können.

4.5 Problembereiche der gemeinen Bruchrechnung

Einige Probleme der gemeinen Bruchrechnung beginnen schon bei den Begriffsbezeichnungen Erweitern und Kürzen, da diese Begriffe im Alltag verwendet werden. Dass beispielsweise das Kürzen mit einer Gehaltskürzung in Verbindung gebracht werden kann und dass sich dabei die Vorstellung entwickelt, dass hier das Gehalt kleiner wird, könnte zu dem Irrglauben führen, dass beim Kürzen eines Bruches dieser ebenfalls kleiner wird (vgl. Padberg 2002: S. 70). Jahnke stellt weiterhin fest, dass die meisten Probleme und Fehler in der Bruchrechnung nur auf ein mangelndes Bruchzahlverständnis zurückzuführen sind (vgl. Jahnke 1995: S. 5). Einige weitere Probleme, die sich inhaltlich auf das Erweitern, Kürzen und den Größenvergleich beziehen, sollen im Folgenden stichpunktartig aufgelistet werden.

Erweitern

- *Falsches Erweitern*
  Aufgaben der Art „Erweitere richtig $\frac{3}{4} = \frac{\square}{8}$" werden von Schülern oft falsch bearbeitet, da hier eigene Additionsstrategien eingeflochten werden, wie in diesem Beispiel $4 + 4 = 8$, also gilt $3 + 4 = 7$. Auch wenn der Zähler und der Nenner mit derselben Zahl „erweitert" wurden, ist offensichtlich, dass die Schüler nur einen falschen Algorithmus anwenden, ohne das Prinzip verstanden zu haben (vgl. Padberg 2002: S. 71).

- *Einbettung der natürlichen Zahlen*
  Der Zusammenhang zwischen den natürlichen Zahlen und den Bruchzahlen ist vielen Schülern unklar. Deshalb stellen Aufgabentypen der Art $7 = \frac{\square}{7}$ eine hohe Fehlerquelle bei Schülern dar. Dabei wird eine natürliche Zahl n oftmals mit dem Bruch $\frac{n}{n}$ gleichgesetzt (vgl. Padberg 2000: S. 14).

Kürzen

- *Spezielle Zahlenkonstellationen*
  Padberg beschreibt, dass bei speziellen Zahlenkostellationen wie beispielsweise $\frac{9}{18} = \frac{1}{9}$ eine Zahl, hier die 9, so dominant ist, dass die Schüler die gegebene Gleichung als scheinbar richtig erkennen (vgl. Padberg 2002: S. 70).

- *Vollständiges Kürzen*
  Beim vollständigen Kürzen muss unterschieden werden zwischen der Fähigkeit, vollständig zu kürzen, und der Fähigkeit, konsequent am Ende von Bruchrechenaufgaben kürzen zu können. Ist das Kürzen am Ende von Aufgaben nicht ausdrücklich verlangt, vergessen viele Schüler, ihr Ergebnis auf den Kernbruch zu kürzen (vgl. Padberg 2002: S. 71f.).

Größenvergleich

- *Getrenntes Betrachten von Zähler und Nenner*
  Nach der systematischen Behandlung der Vergleichsregeln stellt man fest, dass Schüler ihre Aussagen nur auf den Vergleich des Zählers *oder* des Nenners stützen. Die Erklärungen laufen dann beispielsweise nach folgenden Schemata ab: Ein kleinerer Nenner bedeutet größerer Bruch, unabhängig vom Zähler; oder: Ein größerer Zähler bedeutet, unabhängig vom Nenner, größerer Bruch. Auch hier werden Regeln angewandt, die inhaltlich nicht verstanden wurden (vgl. Padberg 2002: S. 81).

- *Fehlerhafte Übertragung der Ordnung der natürlichen Zahlen*
  Die Vorstellung „Größerer Nenner bedeutet größerer Bruch" basiert auf einer falschen Übertragung der Größenordnung der natürlichen Zahlen auf die Brüche, dies ähnelt dem Problembereich „Einbettung der natürlichen Zahlen" beim Erweitern (vgl. Padberg 2002: S. 81).

- *Fehlende Stücke*
  Es gibt einseitige Betrachtungen, die über die Anzahl der Stücke, die zum Ganzen fehlen, argumentieren. Inhaltlich gesehen setzen solche Argumentationen ein hohes Verständnis voraus, wie schon der Vorschlag von Winter beim Größenvergleich (siehe Abschnitt 4.4.2: S. 49), jedoch passiert hier ein entscheidender Fehler: Es wird nur betrachtet, wie viele Stücke zum Ganzen fehlen. Daraus wird oftmals unmittelbar geschlussfolgert, dass derjenige Bruch größer ist bei dem weniger Stücke zum Ganzen fehlen – die Größe der Stücke wird dabei nicht beachtet (vgl. Padberg 2002: S. 82).

Der vorliegende Lernpfad setzt sich mit dem Erweitern, Kürzen und dem Größenvergleich auseinander und versucht, im Rahmen seiner Möglichkeiten als in die Thematik einführende E-Learning Lernumgebung, die aufgeführten systematischen Gesichtspunkte der drei Lernthemen sowie die dargestellten anschaulichen Umsetzungshinweise, einschließlich der Betrachtung der Fehlerbereiche, umzusetzen. Die Lernpfadgruppe „Brüche erweitern, kürzen und vergleichen" soll zu Beginn des nächsten Teils didaktisch reflektiert werden.

Teil II

Didaktische Durchdringung der Lernpfade

Kapitel 5

Voraussetzungen und Lernziele

5.1 Voraussetzungen der Lernpfadgruppe

Der Lernpfad gliedert sich in die Einheit „Erweiterung des Zahlenbereichs: Menge $\mathbb{Q}_0^+$ der positiven rationalen Zahlen" ein. Laut Lehrplan wird vorgeschlagen, nachdem sich die Schüler den Bruchbegriff anhand einer Alltagssituation erschlossen haben und nachdem von bildlichen Darstellungen des Bruchbegriffs zur Darstellung mit dem Symbol der Bruchzahl übergegangen wurde, die Einheit folgendermaßen aufzubauen (vgl. ISB 2008: o. S.):

- Brüche: Bruchteile von Größen; Einführung des Begriffs Bruch mit Zähler und Nenner
- die positive rationale Zahl als Wert eines Quotienten
- Erweitern und Kürzen; gleichnamige Brüche; Größenvergleich von positiven rationalen Zahlen

Die Lernpfadgruppe „Brüche erweitern, kürzen und vergleichen" ist als interaktiver Einstieg in diesen dritten Lernzielbereich zu verstehen, die die beiden vorherigen Lernziele als bekannt voraussetzt und deren Inhalts- und Aufgabenvariationen den Rahmen eines Einstieges erfüllen.

5.2 Lernziele, Inhalts- und Prozessziele

Die Lernziele lassen sich direkt aus dem Lehrplan ablesen: „Erweitern und Kürzen; gleichnamige Brüche; Größenvergleich von positiven rationalen Zah-

len" (ISB 2008). Die zugehörigen Inhalts- und Prozessziele[32], welche zur Übersichtlichkeit geordnet wurden, sollen im Folgenden aufgelistet werden.

5.2.1 Inhaltsziele

Erweitern

- Die Schüler sollen erfahren, dass es Brüche gibt, die zwar unterschiedliche Namen haben, aber dennoch den gleichen Bruchteil darstellen. Speziell die Gleichwertigkeit von erweiterten Brüchen sollen die Schüler kennen lernen.

- Weiterhin sollen die Schüler den Begriff des Erweiterns kennen und erklären können.

- Den Schülern soll bekannt sein, dass Erweitern anschaulich gesehen bedeutet, die Unterteilungen eines Bruchteiles zu verfeinern.

- Zuletzt sollen die Schüler vorgegebene Brüche erweitern können. Dazu müssen sie die Rechenregeln, wie $\frac{m}{n} = \frac{m \cdot k}{n \cdot k}$ für alle k, m, n aus den natürlichen Zahlen, beherrschen sowie erkennen, dass eine Erweiterung außer mit Null immer möglich ist.

Kürzen

- Die Schüler sollen darlegen können, dass Kürzen die Umkehrung von Erweitern ist und dass in diesem Zusammenhang Kürzen bedeutet, dass, wenn man anschaulich überlegt, die Unterteilungen eines Bruchteiles vergröbert werden.

- Die Begriffe kürzen und vollständig kürzen sollen die Schüler beherrschen und erklären können.

- Des Weiteren sollen die Schüler entscheiden können, ob sich ein vorgegebener Bruch kürzen lässt und in der Lage sein, die Rechenregeln des Kürzens, wie $\frac{m}{n} = \frac{m:k}{n:k}$ für alle m, n aus den natürlichen Zahlen und für alle k, die sowohl Teiler von m als auch von n sind, anwenden zu können.

[32] Die Ziele des Mathematikunterrichts lassen sich nach Holland in Inhalts- und Prozessziele klassifizieren (vgl. Holland 2007: S. 16–18).

- Die Schüler sollen informiert werden, dass nur solange gekürzt werden kann, wie es einen gemeinsamen Teiler außer 1 von Zähler und Nenner gibt, und selbst in der Lage sein, vollständig zu kürzen.

Größenvergleich

- Die Schüler sollen die verschiedenen Verfahren zum Größenvergleich von Brüchen kennen und anwenden können.

- Die Definition der Begriffe gemeinsamer Nenner und Hauptnenner sollen die Schüler wiedergeben können.

5.2.2 Prozessziele

Erweitern

- Die Schüler sollen fähig sein, die Beziehungen zwischen gleichwertigen Brüchen zu untersuchen und speziell die Gleichwertigkeit erweiterter Brüche zu entdecken.

- Aus bekannten Zusammenhängen sollen die Schüler den Hintergrund des Erweiterns, die Verfeinerung, entdecken.

- Anhand anschaulicher Aufgaben sollen die Schüler die Rechenregeln zum Erweitern entdecken und algorithmisieren.

- Die Schüler sollen begründen können, warum nicht mit Null erweitert werden darf.

Kürzen

- Aus anschaulichen Zusammenhängen sollen die Schüler den Hintergrund des Kürzens, die Vergröberung, entdecken.

- Anhand anschaulicher Aufgaben sollen die Schüler die Rechenregeln zum Kürzen entdecken und algorithmisieren.

- Weiterhin sollen die Schüler das vollständige Kürzen definieren können.

Größenvergleich

- Die Regeln zum Größenvergleich sollen die Schüler an interaktiven Aufgaben entdecken und versuchen zu formalisieren.
- Die Schüler sollen eine Definition des Begriffes Hauptnenner angeben können.

Da sich die Prozessziele auf mathematische Aktivitäten beziehen, ist m. E. eine Realisierung dieser nur längerfristig und durch ausreichend Übung an vielen verschiedenen Inhalten möglich.

Kapitel 6

Didaktische Begründung des Aufbaus

Da sich Lernpfade in das Lernen an Stationen eingliedern (siehe Abschnitt 2.1.4: S. 20), wurden die meisten Inhaltsziele als je eine Lernstation zusammengefasst, die der Reihe nach durchlaufen werden sollen. So ist der Aufbau des Lernpfades und der Laufzettel übersichtlicher.

Weiterhin wurde berücksichtigt, dass der Aufbau der Lernpfade untereinander ähnlich ist, damit die Schüler mit einer wahrscheinlich für sie neuen Situation, nämlich mit dem Computer entdeckend zu lernen, schneller vertraut werden können. Jeder Lernpfad beginnt demnach mit einem Comic, welcher die Schüler für die Themen der einzelnen Lernpfade motivieren soll. Danach folgen die einzelnen Stationen. Jeder Lernpfad endet schließlich mit einer Station für Übungen. Diese Station ist jeweils differenziert aufgebaut, das heißt, die Schüler können aus mehreren Aufgaben, die nach Schwierigkeitsgraden angeordnet sind, auswählen.[33] Auf diese Weise kann jeder versuchen sich selbst einzuschätzen, wie gut er den Lernstoff schon verstanden hat. Außerdem begleiten zwei Comicfiguren die Lernpfade: ein Fragezeichen und ein Ausrufezeichen. Auch diese haben stets die gleichen Funktionen: Frau Fragezeichen stellt Fragen und weiß meistens bereits die Antwort, während Herr Ausrufezeichen nur selten auf die Fragen von Frau Fragezeichen eingehen kann. Dafür soll er von den Schülern mit den Merksätzen des Lernpfades verbunden werden.

[33]Es werden nicht zu jeder Aufgabe verschiedene Schwierigkeitgrade angeboten. An einigen Stellen gibt es nur mittelschwere Aufgaben, die jedoch nicht als mittelschwer zu verstehen sind, sondern nur als zusätzliche Motivation für schwächere Schüler gedacht sind, wenn diese eine solche als mittelschwer gekennzeichnete Aufgabe meistern.

Die Lernpfadgruppe wurde auf den Überlegungen des entdeckenden Lernens aufgebaut. Dabei wurde darauf Acht gegeben, dass der Lerninhalt nicht von außen an die Schüler herangetragen wird, sondern dass die Schüler in Eigenregie entdecken, nachfragen und forschen können. (siehe Abschnitt 3.2: S. 27) Damit trotzdem ein grober Überblick über den Lernfortschritt der Schüler gegeben werden kann, wurden Laufzettel ausgeteilt, auf denen die Schüler die einzelnen Stationen bewerten und sich Notizen machen sollten. Weiterhin wurde berücksichtigt, dass ein völlig selbstständiges Arbeiten der Schüler nur dann motivierend gestaltet werden kann, wenn sie entsprechende Rückmeldungen bekommen. Dazu wurde für alle externen interaktiven Aufgaben das Ausrufezeichen verwendet, das anzeigt, dass die Aufgabe erfolgreich gelöst wurde (siehe Abbildung 6.1: S. 61). Eine Prüfung, ob die Schüler eine bestimmte Station bearbeitet haben oder ob sie sich an die vorgegebene Reihenfolge gehalten haben, ist zum einen aus technischer Hinsicht in diesem Wiki nicht zu realisieren (siehe Abschnitt 7.2.1: S. 90) und andererseits nicht im Sinne des entdeckenden Lernens, das die Eigenständigkeit der Schüler fordert und fördert, wozu auch selbstständige Überprüfungen und ehrliches Arbeiten gehören (siehe Abschnitt 3.2.2: S. 29).

Weiterhin ist die Lernpfadgruppe interaktiv aufgebaut. Obwohl bisher „kein Konsens über die Definition von Interaktivität und Interaktion” (Staemmler 2006: S. 114) besteht, lässt sich die Gesamtheit der Lernpfade nach den Ausführungen von Staemmler als „proaktive Webseiten” deklarieren, in denen Drag-and-Drop und ähnliche Übungen integriert sein sollten (vgl. Staemmler 2004: S. 116). Auch für die Gestaltung der Lernpfadgruppe wurde Interaktivität im Wesentlichen als „Interaktionen mit der Benutzerschnittstelle (hier Maus und Tastatur) über die Hardware und das Navigieren innerhalb der dargebotenen Lerneinheit” (Staemmler 2004: S. 116) verstanden. Die andere Seite der Interaktivität, als Form der kognitiven Auseinandersetzung des Lerners mit den Lerninhalten, wurde mit Hilfe des bereits geschilderten entdeckenden Lernens integriert. Die Entscheidung für einen interaktiven Lernpfad, unabhängig von der Themenwahl dieser Arbeit, war keine schwere, da „sich der Großteil der Forscher darüber einig ist, dass die Interaktivität und Interaktion (in der Präsenz- und Online-Lehre) einen positiven Einfluss auf den Lernprozess und Lernerfolg hat” (Staemmler 2004: S. 114).

Die einzelnen Überlegungen zu der Lernpfadgruppe „Brüche erweitern, kürzen und vergleichen” werden im Folgenden geschildert. Dabei wird nach jeder

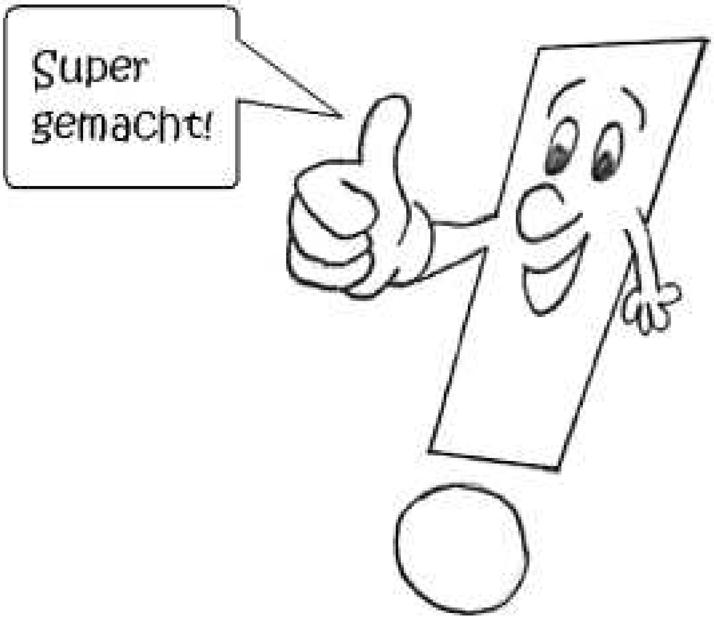


Abbildung 6.1: Herr Ausrufezeichen gratuliert zur erfolgreich bearbeiteten Aufgabe.

Station bereits der Unterrichtsversuch[34] reflektiert und es wird beschrieben, welche Probleme oder Schwierigkeiten die Schüler mit dem Laufzettel oder dem vorliegenden Lernpfad hatten.

6.1 Lernpfad „Brüche erweitern”

Der Lernpfad „Brüche erweitern” (siehe Anhang A: S. 123) versucht die oben genannten Inhalts- und Prozessziele mittels interaktiver, zum entdeckenden Lernen anregender Inhalte umzusetzen. Dafür wurden die folgenden Stationen aufgegriffen und gestaltet.

6.1.1 Station Wiederholung

Wenngleich der Lernpfad „Brüche erweitern” voraussetzt, dass bildliche Darstellungen des Bruchbegriffs, insbesondere Bruchteile von Größen, bereits behandelt wurden und dass die Einführung des Begriffs Bruch mit Zähler und

[34]Der eigentliche Unterrichtsversuch mit den technischen Gegebenheiten, den Voraussetzungen und dem anschließenden Test über den Lernpfad wird erst im folgenden Teil behandelt (siehe Teil III: S. 95). Zur besseren Zuordenbarkeit der Probleme zu den einzelnen Stationen wurden diese jedoch bereits hier eingeflochten.

Nenner den Schülern bekannt ist, ermöglicht er eine kurze Wiederholung.

Mit dem Puzzle *Was gehört alles zu einem Bruch?* (siehe Anhang B.1: S. 132) wiederholen die Schüler auf eine spielerische Art die symbolische Darstellung der Bruchzahl sowie die Begriffe Zähler, Nenner und Bruchstrich. Auch Fuchs führt zu Beginn der Einführung in die Bruchrechnung diese bildliche Zuordnung auf (vgl. Fuchs 2000: S. 4).

In das Quiz[35] *Welcher Bruchteil ist gefärbt?* (siehe Anhang B.2: S. 133) wurde das Größenkonzept des Bruchzahlbegriffes eingebaut (siehe Abschnitt 4.2.1: S. 39), das essentiell für ein fundiertes Bruchzahlverständnis ist. Dabei wurde ausschließlich die erste Grundvorstellung verwandt, da erstens die verschiedenen Aspekte des Bruchzahlbegriffes nicht im Lernpfad thematisiert werden. Zweitens hätte eine Verwendung der zweiten Grundvorstellung „Bruch als Teil mehrerer Ganzer", die nach Padberg noch seltener als die erste Grundvorstellung bei den Schülern verfestigt ist (siehe Abschnitt 4.2.1: S. 39), den Schülern in der vorliegenden Wiederholung kaum eine neue Sichtweise auf die Bruchrechnung verschafft. Das Quiz bietet den Schülern dennoch die Gelegenheit zu testen, inwiefern sie Bruchteile von anschaulichen Größen benennen und zuordnen können. Das Bestimmen von Bruchteilen ist ein fester Bestandteil bei der Einführung der Bruchrechnung (vgl. Padberg 2002: S. 50f. oder Schillinger 2007: S. 3).

Die interaktive Aufgabe *Male die Bruchteile in die Figuren ein* (siehe Anhang B.3: S. 134) überprüft, ob den Schülern die umgekehrte Richtung des Bruchteile-Zuordnens bekannt ist. Sie sollen zu einem gegebenen Bruch entsprechende Figuren, hier Quadrate, so einfärben, dass der farbige Teil des Quadrats der Bruchzahl entspricht (vgl. Schillinger 2007: S. 3).

Die Inhaltsziele des Quiz wie auch der interaktiven Aufgaben, Bruchteile zu benennen und zu färben, werden für spätere Aufgaben wie beispielsweise für die interaktiven Einstiegsaufgaben des Lernpfades „Brüche kürzen" (siehe Anhang D: S. 157) und auch für den abschließenden Test (siehe Anhang H: S. 201), nämlich für Aufgabe 4 des Lernpfades „Brüche erweitern" benötigt.

[35] Da das Einbinden von Brüchen in HTML-Code nur mühsam über Bilder oder Tabellen möglich ist, wurden die Quize von Oliver Knoch für die Lernpfadgruppe programmiert, um dieses Einbinden zu erleichtern (siehe Abschnitt 7.1: S. 89).

Bewertung und Probleme der Schüler

Nur ein kleines Problem trat in dieser Station auf, nämlich dass die Schüler, um auf die externen Übungsseiten zu gelangen, intuitiv die Bilder anklickten und nicht die darunter stehenden Links (zu dieser Problematik siehe Abschnitt 7.2.3: S. 91). Dies ließ die Schüler jedoch unbeeindruckt: Alle Schüler fanden sich zurecht und konnten die gestellten Aufgaben lösen. Auch die Bewertung auf dem zugehörigen Laufzettel (siehe Anhang G.1: S. 194) fiel mit 24 von 26 Schülerstimmen für „Daumen hoch" und keinem „Daumen runter"[36], sehr gut aus.[37]

6.1.2 Station Einführung Erweitern

Das in dieser Station vorzufindende Suchbild *Finde die Unterschiede* (siehe Anhang B.4: S. 135) dient als spielerische Überleitung zu der nächsten Station und soll zunächst darauf aufmerksam machen, dass hier neben drei weiteren Unterschieden zwei, im ersten Moment unterschiedliche Brüche zu finden sind. Der dafür verwandte Zahlenstrahl soll zwar nicht zu früh als Anschauungsmittel eingesetzt werden (siehe Abschnitt 4.4.1: S. 47), der gezeigte hat jedoch keine inhaltlichen Anforderungen, da das dargestellte Bild lediglich zur Suche der Unterschiede dient. Die zugehörigen Ergebnisse sollen die Schüler auf ihrem Laufzettel vermerken. Dabei ist die Bedeutung des Unterschieds zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{11}{22}$ für die Schüler augenscheinlich, dass jedoch trotzdem ein Zusammenhang besteht, wird durch die folgende Station angeregt.

Bewertung und Probleme der Schüler

Weder technische noch inhaltliche Probleme kamen auf. Auch diese Station wurde positiv bewertet, allerdings beurteilten nur noch 22 von 26 Schüler mit „Daumen hoch". Bei der Durchsicht der Laufzettel fiel bei dieser Station auf, dass die Schüler sehr unterschiedlich sorgfältig arbeiteten: Zwei Schüler trugen ihre Ergebnisse der Station nicht in ihre Laufzettel ein, alle anderen beschäftigten sich noch gewissenhaft mit dieser Station.

[36] Die Schüler hatten auf ihren Laufzetteln die Möglichkeit, zwischen drei verschiedenen Bewertungen zu wählen: „Daumen hoch", „Daumen runter" und „Daumen geht so". Bei den folgenden Bewertungen werden jeweils zwei dieser drei Möglichkeiten genannt, aus der Differenz von 26 Schülern ergibt sich die Anzahl der restlichen Bewertungen.

[37] Für die Problematik des Laufzettels siehe Abschnitt 8.2 auf Seite 101.

6.1.3 Station Zusammenhang zwischen bestimmten Brüchen

Dass ein und derselbe Bruchteil durch verschiedene Brüche dargestellt werden kann, was als grundlegende Voraussetzung zum Verständnis der Bruchrechnung gesehen wird (siehe Abschnitt 4.3.1: S. 43), soll hier von den Schülern entdeckt werden. Die Basis, um die Betrachtung der Gleichwertigkeit umzusetzen, bildet die bereits geschilderte Idee von Padberg. Er schlägt vor, ein mit einem Bruchteil markiertes Blatt zu falten, da sich auf diese Weise zwar der Bruch jedoch nicht der Bruchteil verändert (siehe Abschnitt 4.3.2: S. 44). Zusätzlich dazu wird der Gedanke umgesetzt, dass die Betrachtung der Gleichwertigkeit bestimmter Brüche vor dem Einsatz von Regeln und Formeln für das Erweitern stehen sollte (siehe Abschnitt 4.3.1: S. 44). Das zur Veranschaulichung dieses Verständnisses integrierte interaktive GeoGebra-Applet *Lasst uns der Vermutung auf die Spur gehen* ermöglicht anhand zweier Rechtecke einen Vergleich von verschiedenen Brüchen, repräsentiert durch Bruchteile. Durch geeignete Fragen als Impulse können die Schüler so die Gemeinsamkeit der Brüche $\frac{1}{2}$ und $\frac{11}{22}$ aus der vorherigen Station erfahren. Ihre Entdeckungen tragen sie auf ihrem Laufzettel ein. Dass diese Gemeinsamkeit nicht nur bei $\frac{1}{2}$ und $\frac{11}{22}$ der Fall ist, sollen die Schüler durch eine zweite Aufgabe, die sich mit dem Finden eines Bruches beschäftigt, der den gleichen Bruchteil wie $\frac{1}{4}$ anzeigt, herausfinden. Somit erarbeiten die Schüler eigenständig, dass es Brüche gibt, die zwar unterschiedlich aussehen, aber dennoch den gleichen Bruchteil anzeigen.

Bewertung und Probleme der Schüler

Bei dieser Station traten die ersten Probleme auf. Während die Schüler die vorherigen Aufgaben meist intuitiv lösen konnten, war dies die erste Aufgabe mit längerer Aufgabenstellung. Da diese so formuliert wurde, dass den Schülern nicht alles vorgegeben wird, sondern sie trotz Aufgabenstellung selbstständig entdecken können (siehe Abschnitt 3.2.6: S. 34), kamen nach wenigen Minuten die ersten Fragen, wie beispielsweise „Was muss ich hier genau tun?" oder „Wie soll ich die Schieberegler bei der zweiten Frage einstellen?" Alles Fragen, die entweder allein durch das erneute (Vor-)Lesen der Aufgabenstellung beantwortet werden konnten oder die erkennen ließen, dass die Schüler ein freies selbstständiges Arbeiten noch nicht gewohnt waren. Auch gab es genau gegen-

sätzliche Bearbeitungen der Art, dass einige Schüler mehr als den verlangten einen Bruch gefunden und notiert haben, der den gleichen Bruchteil wie $\frac{1}{4}$ anzeigt.

Diese Beanspruchung schlug sich in der Bewertung dieser Station nieder, da nur noch 20 Schüler mit „Daumen hoch” stimmten und gleichzeitig die zwei ersten negativen Bewertungen mit „Daumen runter” zu finden waren.

6.1.4 Station Erweitern

Damit die Schüler mit dem Begriff Erweitern nicht nur einen bloßen Algorithmus verbinden,[38] sondern eine Verfeinerung von Unterteilungen assoziieren,[39] soll das interaktive GeoGebra-Applet *Die Pizza-Aufgabe* (siehe Anhang B.5: S. 136) das Erweitern im Sinne des gerechten Teilens veranschaulichen. Dabei sollen drei Pizzen auf drei Personen gerecht aufgeteilt werden. Die Pizzen sind jedoch schon in unterschiedlich viele, gleichgroße Stücke geschnitten, so dass das Aufteilen einiger Überlegungen bedarf. Alle drei Teilaufgaben lassen sich prüfen. Die letzte zeigt jedoch erst dann an, dass sie richtig gelöst wurde, wenn die beiden vorherigen Aufgaben bereits erfolgreich bearbeitet wurden. Die Idee dieser interaktiven Aufgabe stützt sich auf die bei Brunnermeier et al. dargestellten Aufgabe (vgl. Brunnermeier et al. 2004: S. 19).[40] Als Quintessenz wird der Begriff Erweitern eingeführt, der in diesem Moment völlig abseits der später definierten Formeln zu sehen ist und nur als Verfeinerung von Unterteilungen festgelegt wird.

Als nächstes greift der Lernpfad die Idee Kurths auf (siehe Abschnitt 4.2.2: S. 42), die fordert, dass die Rechenregeln des Erweiterns von den Schülern entdeckt werden sollen. Den Ausgangspunkt bildet hier das gerechte Teilen, allerdings ist es etwas abstrakter mit Hilfe eines interaktiven GeoGebra-Applets *Die Rechnung, die dahinter steckt* gehalten. Ein ebenso anschauliches Vorgehen schlägt Padberg vor (siehe Abschnitt 4.3.2: S. 44), um auf diese Weise das Erweitern mit einem vorstellbaren Inhalt zu füllen, damit später die reine Symbolik und das Formelle von den Schülern besser verstanden werden kön-

[38] Die Schüler halten möglicherweise Erweitern nur für einen Algorithmus, der beschreibt, dass Zähler und Nenner mit derselben natürlichen Zahl multipliziert werden.

[39] Diese Methode ist geeignet, wie im Abschnitt 4.3.2 auf Seite 44 beschreiben, um ein besseres Verständnis für das Bruchrechnen zu schaffen.

[40] Diese Idee ist aus einem Schulbuch für die 6. Klasse Gymnasium entnommen, dort werden allerdings bereits an diesem Beispiel die Rechenregel für das Erweitern eingeführt, welche im vorliegenden Lernpfad erst im nächsten Schritt folgen.

nen. Dafür werden im Lernpfad, ähnlich wie bei dem vorherigen Applet zum Entdecken der Gemeinsamkeit zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{11}{22}$, Impulse als Aufgabenstellung eingesetzt, die das Augenmerk der Schüler auf den Vorgang des Erweiterns lenken sollen. Da der Lernpfad auf dem Hintergrund des entdeckenden Lernens erstellt wurde, werden die Ergebnisse dieser Station, die sich die Schüler wiederum auf ihrem Laufzettel notieren sollen, nicht von der Lehrkraft geprüft. Die Schüler werden selbst in die Verantwortung gezogen und kontrollieren ihre Ergebnisse selbstständig mit Hilfe der nächsten Aufgabe (siehe Abschnitt 3.2.2: S. 29).

Das Quiz *Hast du die Fragen richtig beantwortet?* (siehe Anhang B.6: S. 139) trägt durch „Trial and Error" die Lösungen der Aufgaben, die durch das vorherige GeoGebra-Applet erarbeitet werden sollten, zusammen. Die Schüler können so ihre aufgeschriebenen Lösungen prüfen und erfahren, welche Lösung die richtige wäre. Auf diese Weise kontrollieren sich die Schüler zwar selbst, aber da entdeckendes Lernen nicht so einfach umgesetzt werden kann (siehe Abschnitt 3.2.2: S. 29), bietet diese Aufgabe gleichzeitig die Möglichkeit, die Lösungen auch nachträglich herausfinden zu können, falls die Aufgabe zu schwer gewesen wäre. Als Ergebnis erfahren die Schüler, wie ein Bruch rechnerisch erweitert werden kann. Die Aufgabe endet mit dem zugehörigen Merksatz[41], den sich die Schüler in ihr Heft schreiben sollen.

Bewertung und Probleme der Schüler

Bei der *Pizza-Aufgabe* mussten die Schüler Pizzastücke mit der Maus in einen bestimmten Bereich in einen Teller ziehen. Dabei war es wichtig, die Stücke nicht zu dicht an oder über den Rand hinaus zu schieben, sondern die Stücke eher in der Mitte zu platzieren, um ein richtiges Ergebnis zu erzielen. Dabei hatten die Schüler Probleme. Hier musste die Lehrkraft erklären, warum die Prüfung der Aufgabe „falsch" anzeige, obwohl doch alles richtig zu sein schien.[42] Auch die Schwierigkeit, überlappende Stücke voneinander zu trennen, kostete einige Erklärung. Nachdem diese Hindernisse jedoch allen einmal erklärt wurden, konnten die Schüler ähnliche Applets, wie die *Schokoladen-Aufgabe* der nächsten Station, ohne erneutes Nachfragen bedienen.[43]

[41]Der Merksatz orientiert sich an dem, wie er von Schillinger verwendet wird (vgl. Schillinger 2007: S. 8).

[42]Für die Ursache dieser Problematik siehe Abschnitt 7.3 auf Seite 92.

[43]Für die Ursache dieser Problematik siehe Abschnitt 7.3.

Auch der Laufzettel scheint für die Schüler nicht optimal gestaltet gewesen zu sein, da die Anforderung an die Schüler, zwar jede Station zu bewerten, aber nicht zu allen Aufgaben des Lernpfades etwas auf dem Laufzettel zu notieren, von einigen Schülern missverstanden wurde. So fanden sich beispielsweise auf einigen Laufzetteln detaillierte Beschreibungen, wie die *Pizza-Aufgabe* gelöst wurde, obwohl keine Eintragung für diese Aufgabe vorgesehen war. Andere Schüler wiederum empfanden den Laufzettel scheinbar als Last, da sie kaum etwas auf ihm notierten, auf Nachfrage jedoch die Antworten noch wussten.[44]

Die Aufgabenfülle und auch der Anspruch der Aufgaben führte dazu, dass diese Station mit 17 „Daumen hoch” und vier „Daumen runter” bewertet wurde.

6.1.5 Station Besonderheiten beim Erweitern

Die vorletzte Station des Lernpfades „Brüche erweitern” beschäftigt sich mit den Besonderheiten des Erweiterns (siehe Abschnitt 4.3.2: S. 44). Zum einen solle hier thematisiert werden, dass sich der Wert des Bruches nicht ändert, wenn man erweitert. Diese Formulierung entspricht dem, dass sich zwar der Bruch, aber nicht die Bruchzahl beim Erweitern ändert. Da diese Beschreibung schwer zu fassen ist, richtet sich die im Lernpfad verwandte Benennung nach Brunnermeier et al. (vgl. Brunnermeier et al. 2004: S. 22), die die Gleichwertigkeit von erweiterten Brüchen angibt. Das interaktive GeoGebra-Applet *Die Schokoladen-Aufgabe* (siehe Anhang B.7: S. 140) soll dazu dienen, dieses Verständnis zu fördern. Die Grundidee der Aufgabe stützt sich auf Brunnermeier et al. (vgl. Brunnermeier et al. 2004: S. 33). Die Schüler sollen hier drei Tafeln Schokolade auf neun Kinder verteilen und zwar insgesamt viermal. Die Tafeln werden nacheinander erweitert, also im Sinne einer Verfeinerung in unterschiedlich viele Stücke pro Tafel zerteilt: nämlich in 3, 6, 9 und 18 Stücke. Diese Stücke sollen jeweils gerecht verteilt werden. Die abschließende Frage „Du hast die Schokolade in unterschiedlich viele Stückchen geteilt, also mit unterschiedlichen Zahlen erweitert. Meinst du, dass ihr, du und deine Freunde, dadurch mehr oder weniger Schokolade bekommen habt?” überzeugt auch den letzten Schüler: „Klar hat jeder gleichviel Schokolade gekriegt!”, so rief ein Schüler, der die Aufgabe geschafft hatte.

[44] Die Problematik des Laufzettels wird später noch weiter ausgeführt werden (siehe Abschnitt 8.2: S. 101).

Zum anderen soll dargelegt werden, dass Erweitern immer außer mit Null möglich ist[45]. Da dieser Punkt nur mit Mühe entdeckt werden kann und diese Entdeckung schon fast einen eigenen Lernpfad bräuchte, soll hier ein *Comic* mit den Begleitern Frau Fragezeichen und Herrn Ausrufezeichen helfen. Dabei wird auf die Voraussetzung des Lernpfades, Brüche als Quotienten darstellen zu können (siehe Abschnitt 5.1: S. 55), zurückgegriffen. Ein Merksatz fasst diese beiden Erkenntnisse, dass sich der Wert beim Erweitern nicht ändert und dass immer außer mit Null erweitert werden kann, zusammen.

Bewertung und Probleme der Schüler

Bei dieser Station traten keine Schwierigkeiten auf, die *Schokoladen-Aufgabe* wurde sogar in dem Test über den Lernpfad bei den Eintragungen zu Lob und Kritik erwähnt und dort als besonders gut bewertet.

Allgemein gingen die Bewertungen dieser Station wieder in die Höhe. So bewerteten 19 Schüler mit „Daumen hoch" und zwei mit „Daumen runter".

6.1.6 Station Übungen zum Erweitern

Dass zur Vertiefung des Erweiterns verschiedene und variationsreiche Aufgaben nötig sind, wurde bereits erwähnt (siehe Abschnitt 4.3.2: S. 45). Auch Weigand weist darauf hin, dass nur anhand mehrerer gleichartiger Aufgaben wirklich geübt werden könne. (vgl. Weigand o. J.: S. 6) Die Auswahl der vorliegenden Aufgaben bezieht sich unter anderem auf die Vorschläge von Padberg (vgl. Padberg 2002: S. 66) sowie die des Schülerarbeitsheftes (vgl. Schillinger 2007: S. 8). Sechs Aufgabentypen wurden ausgewählt, die zu vier Übungen zusammengefasst wurden.

Erste Übung

Die Aufgabe *Berechne die erweiterte Zahl* (siehe Anhang B.8.1: S. 141) ist in die drei Schwierigkeitsstufen leicht, mittelschwer und schwer eingeteilt und bildet die erste Übung. Dabei müssen die Schüler einen zu ihnen passenden

[45] Auffällig bei diesem Lernziel ist, dass es in der verwendeten Literatur m. E. nicht ausreichend thematisiert wurde. Zwar gibt Padberg an, dass mit jeder natürlichen Zahl erweitert werden darf, und schließt damit die Null aus; es fehlt jedoch ein entsprechender didaktischer Hinweis zur Umsetzung dieses Problems.

Schwierigkeitsgrad wählen und dann je sechs Aufgaben mit der Aufgabenstellung „Erweitere mit ..." (vgl. Schillinger 2007: S. 8) lösen, die einzeln auf Richtigkeit geprüft werden können. Sind alle sechs Aufgaben richtig gelöst, erscheint das den Schülern bereits bekannte Ausrufezeichen mit einem lobenden Ausspruch und einem großen „Daumen hoch". Die Schwierigkeitsstufen unterscheiden sich hier nur durch größere angegebene Zahlen, die für schnelle Schüler eine Herausforderung sein sollen. Außerdem wurde darauf geachtet, dass der zu erweiternde Bruch mal rechts und mal links des Gleichheitszeichens steht, damit keine festgefahrene Eintönigkeit entsteht.

Zweite Übung

Der Aufgabentyp *Mit welcher Zahl wurde erweitert* (siehe Anhang B.8.2: S. 142) bildet zusammen mit dem Aufgabentyp *Erweitere auf den gleichen Wert* (siehe Anhang B.8.3: S. 143) die zweite Übung. *Mit welcher Zahl wurde erweitert* ist der leichte Aufgabentyp dieser Übung, *Erweitere auf den gleichen Wert* ist in die Kategorien mittelschwer und schwer unterteilt. Auch hier müssen die Schüler sich einen Schwierigkeitsgrad auswählen und mit diesem arbeiten.

Der leichte Aufgabentyp beschränkt sich darauf, dass die Schüler in sechs Aufgaben die Erweiterungszahlen[46] eintragen müssen (vgl. Brunnermeier et al. 2004: S. 23). Dabei wurde darauf geachtet, dass diese Eintragungen an verschiedenen Positionen, beispielsweise auf der rechten und auf der linken Seite des Gleichheitszeichen, stattfinden, damit produktiv geübt werden kann (vgl. Weigand o. J.: S. 6f.).

Der mittelschwere und schwere Aufgabentyp, der sich an Schillinger orientiert (vgl. Schillinger 2007: S. 8), unterscheidet sich diesmal nicht durch schwierigere Zahlen, sondern durch den Aufbau. Der mittelschwere Aufgabentyp besteht aus vier Aufgaben der Art „$\frac{3}{4} = \frac{\square}{8}$", also aus einem Bruch, dessen Zähler oder dessen Nenner noch einzusetzen ist, und der so zu erweitern ist, dass beide gegebene Brüche den gleichen Wert haben. Der Anspruch der schweren Aufgabe ist hier größer. Hier sollen zwei Brüche auf den gleichen Wert eines weiteren gegebenen erweitert werden. Auch bei dieser Aufgabe wurde darauf geachtet, dass die Lücken an unterschiedliche Stellen gesetzt wurden.

[46]Diesen Begriff verwendet auch Padberg (vgl. Padberg 2002: S. 66).

Dritte Übung

Die dritte Übung besteht aus einem mittelschweren und einem schweren Quiz. Obwohl es bei dieser Übung keine leichte Aufgabe gibt, sollte jeder Schüler die mittelschwere Aufgabe lösen können. Durch Versuch und Irrtum können die Schüler die Lösung der Aufgabe selbst herausfinden, auch wenn sie inhaltlich nicht alles verstanden haben. Weiterhin ist die Aufgabe wie folgt zu verstehen.

Das interaktive Quiz *Richtig oder falsch?* (siehe Anhang B.8.4: S. 145) besteht aus sechs Aufgaben, bei denen die Schüler entscheiden müssen, ob bei einer gegebenen Aussage richtig oder falsch erweitert wurde. Diese Übung orientiert sich an Padberg (vgl. Padberg 2002: S. 66) und nimmt zusätzlich die von ihm ausgewiesene Fehlerquelle, dass bei einigen Gleichungen der Art $\frac{1}{9} = \frac{9}{18}$ die Zahl 9 so dominant ist, dass die Gleichung als richtig angesehen wird (siehe Abschnitt 4.5: S. 50), mit auf.

Die schwere Aufgabe dieser Übung, das Quiz *Welcher Bruch wurde erweitert?* (siehe Anhang B.8.5: S. 146), spricht bereits implizit das Kürzen an und ist in Anlehnung an Padberg erstellt worden (vgl. Padberg 2002: S. 66). Die Schüler entscheiden hier, welcher Bruch erweitert wurde, so dass der gegebene Bruch entstanden ist. Da diese Aufgabe ein tiefes Verständnis des Erweiterns erfordert, gibt es bei dem Quiz nur vier Aufgaben mit je drei Auswahlmöglichkeiten.

Vierte Übung

Die vierte und letzte Übung besteht aus einer mittelschweren Aufgabenreihe *Erweitere auf den gleichen Nenner* (siehe Anhang B.8.6: S. 147). Dafür müssen zweimal zwei Brüche und einmal drei Brüche auf einen vorgegebenen gemeinsamen Nenner erweitert werden. Diese Aufgabenstellung gleicht den Vorschlägen von Padberg (vgl. Padberg 2002: S. 67) sowie den Aufgaben von Schillinger (vgl. Schillinger 2007: S. 8) und bindet die spätere Anwendung des Gleichnamigmachens für beispielsweise einen Größenvergleich von Brüchen ein.

Probleme und Bewertungen der Schüler

Die letzte Station des Lernpfades „Brüche erweitern" wurde von den Schülern zum größten Teil ordentlich bearbeitet. Inhaltliche oder technische Probleme traten zwar nicht auf, doch fielen einige Mogelversuche der Schüler auf. Da

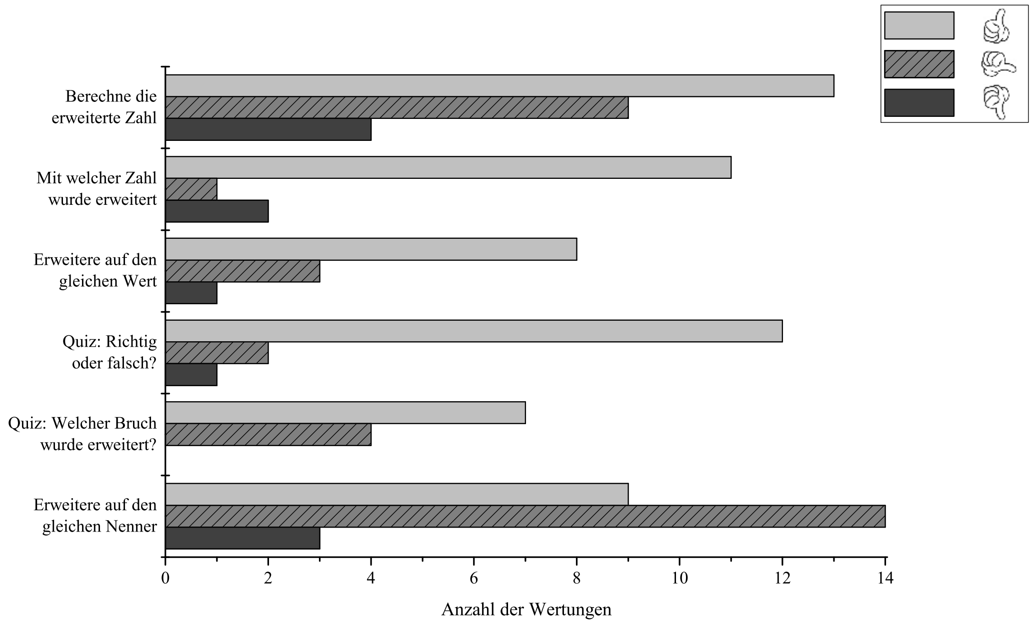


Abbildung 6.2: Bewertungen der Aufgaben zum Erweitern.

nicht kontrolliert wurde (siehe Kapitel 6: S. 60), ob die Schüler wirklich versucht haben, die vorgeschriebenen Aufgaben zu lösen, nutzten einige die Chance zu behaupteten, sie hätten bereits alle Aufgaben geschafft. Auf Nachfrage stellte sich dann jedoch heraus, dass dies nicht der Fall war. Eine Tatsache, die zeigte, dass die Schüler bisher nur selten oder gar nicht entdeckend gelernt haben, da ehrliches Bearbeiten als Voraussetzung für ein effektives entdeckendes Lernen zu sehen ist. (siehe Abschnitt 3.2.2: S. 29)

Die Bewertung dieser Station weicht von der bisherigen ab, da die Schüler hier nur die Aufgaben bewerten sollten, die sie gelöst haben. Demnach wurden von den sechs Aufgaben vier bewertet. Die Abbildung 6.2 zeigt die Bewertungen im Überblick. Dabei fällt besonders positiv das Quiz *Richtig oder falsch?* und besonders negativ die Aufgabe *Erweitere auf den gleichen Nenner* auf.

6.2 Lernpfad „Kürzen”

Der Lernpfad „Brüche kürzen” (siehe Anhang C: S. 149) versucht die oben genannten Inhalts- und Prozessziele (siehe Abschnitt 5.2: S. 55) mittels interaktiver, zum entdeckenden Lernen anregender Inhalte umzusetzen. Dafür wurden die folgenden Stationen aufgegriffen und gestaltet.

6.2.1 Station Los geht's, wir machen alles übersichtlicher!

Die erste Station des Lernpfades „Brüche kürzen" motiviert die Schüler durch einen Comic und versucht ihnen den Gedanken näher zu bringen, dass Brüche übersichtlicher sind, wenn sowohl im Zähler als auch im Nenner kleinere natürliche Zahlen stehen. Dass ohne Zauberei aus einem Bruch mit etwas größeren Zahlen im Zähler und im Nenner ein Bruch entstehen kann, der kleinere Zahlen im Zähler und im Nenner hat, können die Schüler mit den interaktiven Aufgaben *Zimmer aufräumen* (siehe Anhang D.1: S. 158) und *Naschen macht Spaß* (siehe Anhang D.2: S. 160) erfahren. Beide Aufgaben sind gleich aufgebaut. Die Aufgabe *Zimmer aufräumen*, bei der Socken und Handschuhe verstreut sind und die weggeräumt werden sollen, beginnt mit der Anweisung den Bruch in das Formular einzutragen, der den Bruchteil der Socken darstellt. Dazu gibt es eine Hilfe, die den Schülern vorgibt, welche Kleidungsstücke sie für die Eintragung des Zählers und welche sie für die Eintragung des Nenners zählen sollen. Nachdem die Handschuhe in die eine und die Socken gleichmäßig auf die anderen Schubladen von den Schülern verteilt wurden, sollen sie den Bruch in das Formular schreiben, der den Bruchteil der Schublade, in der die Socken sind, darstellt. Auch hierzu gibt es, wie bei der ersten Teilaufgabe eine ausführliche Hilfe. Alle drei Aufgaben können interaktiv geprüft werden. Die Aufgabe *Naschen macht Spaß*, bei der unterschiedlich farbige Bonbons für Freunde aufgeteilt werden sollen, unterscheidet sich nur in der zweiten Anweisung von der vorherigen Aufgabe, da hier eine einzelne spezielle blaue Schachtel für die blauen Bonbons vorgesehen ist. Zum einen bauen beide Übungen auf der Wiederholungsaufgabe *Welcher Bruchteil ist gefärbt* (siehe Anhang B.2: S. 133) auf und zum anderen wurde das von Streefland vorgeschlagene gerechte Verteilen in die Aufgabe mit aufgenommen (siehe Abschnitt 4.3.1: S. 43). Aus didaktischer Sicht ist diese Aufgabe als Einstieg in das Kürzen auf der inhaltlich-anschaulichen Ebene zu sehen, wie Malle sie fordert (siehe Fußnote 26: S. 43).

Als motivierender Einstieg in das Kürzen soll das, im Lernpfad integrierte, interaktive Applet *Aber was steckt hier dahinter?* dienen, das bei den Schülern die folgende Vermutung erwecken soll. Bei einem gegebenen Rechteck mit markiertem Bruchteil und angezeigtem Bruch ändert sich der Bruch durch die Entfernung von überflüssigen Unterteilungen, dabei bleibt der Bruchteil jedoch

gleich. Hintergrund dieser Aufgabe ist, dass sich Kürzen grafisch als Vergröberung der Einteilung eines Ganzen veranschaulichen lässt (siehe Abschnitt 4.3.2: S. 45). Um diesen Gedanken zu verfestigen und damit die Schüler den Hintergrund des Kürzens, nämlich das Vergröbern von Unterteilungen, nicht nur kennen lernen sondern auch selbst anwenden können, soll die interaktive Aufgabe *Welche Striche sind zu viel?* (siehe Anhang D.3: S. 162) beitragen. Auf diese Weise verknüpfen die Schüler mit dem Kürzen eines Bruches nicht nur einen auswendig gelernten Algorithmus, sondern einen tieferen Inhalt, wie es von Malle gefordert wird (siehe Abschnitt 4.3.2: S. 44). Die Idee der Aufgabe basiert auf den Schulbuchaufgaben von Schätz / Eisentraut (vgl. Schätz / Eisentraut 2004: S. 28), die im Lernpfad interaktiv umgesetzt wurde und nicht wie im Schulbuch bereits das Kürzen voraussetzt, sondern in das Kürzen einführen soll. Dafür gibt es eine Einführungsaufgabe, die alle Schüler bearbeiten sollen. Gegeben ist dort ein Rechteck mit einem markierten Bruchteil, den die Schüler zu Beginn in das Formular eintragen sollen. Die anschließende Teilaufgabe lautet, die überflüssigen Striche zu löschen, wofür es auch eine Hilfestellung gibt, um wie viele zu löschende Strecken es sich handelt. Haben die Schüler das geschafft, müssen sie den übrig gebliebenen Bruchteil in ein Formular eintragen. Danach erscheint eine zweite Aufgabe, die zur Differenzierung in die bekannten Schwierigkeitsstufen leicht, mittelschwer und schwer eingeteilt ist. Auch hier sollen sich die Schüler einen Weg aussuchen, der möglichst zu ihnen passt. Die Aufgabenstellung ist dabei die gleiche wie bei der Einstiegsaufgabe, allerdings ist es etwas schwieriger, die richtigen Strecken zu löschen. Für alle drei Aufgabenvarianten gibt es wiederum Hilfen, damit jeder Weg lösbar wird.

Probleme und Bewertungen der Schüler

Die Schüler hatten bei der Aufgabe *Zimmer aufräumen* zunächst keine Probleme, sowohl die erste als auch die zweite Teilaufgabe konnten die meisten, ohne nachfragen zu müssen, lösen. Die dritte Teilaufgabe zeigte allerdings, dass die Schüler sich nicht von der Anzahl der Socken lösen konnten und daher stets den Bruchteil der Socken und nicht den der Socken-Schubladen in das Formular eintrugen. Obwohl die Hilfe zu dieser Eintragung ausdrücklich beschreibt, was die Schüler zählen und wo sie ihr Ergebnis eintragen sollen, mussten einige Schüler stark unterstützt werden, damit sie die Aufgabe erfolgreich lösen konnten. Aufgrund der Ähnlichkeit wurde die nachfolgende Aufgabe *Naschen*

macht Spaß ohne nennenswerte Probleme gelöst. Bei beiden Aufgaben trat in einigen Einzelfällen das Problem auf, dass die Gegenstände, besonders die Socken, nicht richtig in dem dafür vorgesehenen Rechteck platziert wurden, so dass bei der Prüfung der Aufgabe trotz richtiger Aufteilung ein „falsch" ausgegeben wurde. Da dieses Problem jedoch aus der *Pizza-Aufgabe* oder der *Schokoladen-Aufgabe* bereits bekannt war, trat dieses Problem nur bei sehr wenigen Schülern auf.

Die interaktive Aufgabe *Welche Striche sind zu viel?* war für die Schüler kaum eine Herausforderung. Zwar konnte man beobachten, dass viele Schüler die angegebene Hilfe in Anspruch nahmen, die ihnen verriet, wie viele Striche sie löschen sollen, doch verleitet eine nebenstehende Hilfe eben auch zur Verwendung. Die wenigen Schüler, die den schweren Weg einschlugen, klickten sich tapfer durch die Aufgabe. Auch diese war eine der Aufgaben, die die Schüler in dem Test zu dem Lernpfad lobten.

Die Bewertung für diese Station fiel mit 20 „Daumen hoch" und einem „Daumen runter" sehr gut aus.

6.2.2 Station Einführung Kürzen

Als Einstieg in diese Station wird im Anschluss an die Aufgabe *Welche Striche sind zu viel* der Begriff Kürzen eingeführt, der wie der Begriff Erweitern über die Vorstellung von dem Vergröbern von Unterteilungen zu verstehen ist. Außerdem kann zusätzlich geschlussfolgert werden, dass sich auch beim Kürzen der Wert des Bruches nicht ändert. Diese Gedanken orientieren sich an den Vorschlägen von Malle (siehe Abschnitt 4.3.2: S. 44) und Padberg (siehe Abschnitt 4.3.2: S. 45), die fordern, dass die Einführung des Kürzens überlegt und nicht nur ein bloßer Algorithmus für die Schüler sein sollte.

Malles Forderung nach einer Verdeutlichung des Zusammenhangs zwischen Erweitern und Kürzen, der Umkehrungseigenschaft (siehe Abschnitt 4.3.2: S. 46), wird mit dem zunächst versteckten anschaulichen Bild, das sich an Brunnermeier et al. orientiert (vgl. Brunnermeier et al. 2004: S. 22), erfüllt. Dieses Bild erscheint, wenn der Schüler vor die Frage gestellt wird, ob ihm die Definition des Begriffes Kürzens[47], bekannt vorkommt. Die Lösung dieser Frage erklärt das Bild: Kürzen ist die Umkehrung von Erweitern und umgekehrt.

[47]Die Definition des Begriffes Kürzen wird im Lernpfad „Brüche kürzen" anhand der anschaulichen Vorstellung vom Vergröbern der Unterteilungen eines Bruchteils eingeführt.

Als nächstes lässt der Lernpfad mit Hilfe eines interaktiven GeoGebra-Applets *Die Rechnung, die dahinter steckt*, die Rechenregeln des Kürzens von den Schülern entdecken. Ein derart anschauliches Vorgehen schlägt Padberg bereits beim Erweitern vor (siehe Abschnitt 4.3.2: S. 44), wobei das Kürzen ebenso entdeckt werden kann. Für ein geeignetes Entdecken werden im Lernpfad, genau wie bei der Entdeckung der Rechenregeln des Erweiterns, Impulse als Aufgabenstellung eingesetzt. Dadurch wird das Augenmerk der Schüler auf den Vorgang des Kürzens gelenkt und die zusammengetragenen Ergebnisse führen unweigerlich auf die Rechenregeln. Da der Lernpfad auf dem Hintergrund des entdeckenden Lernens erstellt wurde, werden die Ergebnisse dieser Station, die sich die Schüler wiederum auf ihrem Laufzettel notieren sollen, nicht von der Lehrkraft geprüft. Die Schüler sollen selbst in die Verantwortung gezogen werden und selbstständig mit Hilfe der nächsten Aufgabe ihre Ergebnisse kontrollieren (siehe Abschnitt 3.2.2: S. 29).

Das Quiz *Hast du die Fragen richtig beantwortet?* (siehe Anhang D.4: S. 163) trägt durch „Trial and Error” die Lösungen der Aufgaben, die durch das vorherige GeoGebra-Applet erarbeitet werden sollten, zusammen. Die Schüler können so ihre aufgeschriebenen Lösungen prüfen und erfahren, welche Lösung die richtige wäre. Auf diese Weise kontrollieren sich die Schüler zwar selbst, aber da entdeckendes Lernen nicht so einfach umgesetzt werden kann (siehe Abschnitt 3.2.2: S. 29), bietet diese Aufgabe gleichzeitig die Möglichkeit, die Lösungen nachträglich herausfinden zu können, falls die Aufgabe zu schwer gewesen wäre. Als Ergebnis erfahren die Schüler, wie ein Bruch rechnerisch gekürzt werden kann. Sowohl das Quiz als auch die integrierte Aufgabe *Die Rechnung, die dahinter steckt* stehen an der gleichen Stelle wie im Lernpfad „Brüche erweitern” und haben ebenso den gleichen Aufbau.

Probleme und Bewertungen der Schüler

Da diese Station in Anlehnung an die Station Erweitern des Lernpfades „Brüche erweitern” erstellt wurde, war die Aufgabenart und der Lösungsweg der Aufgaben *Die Rechnung, die dahinter steckt* und *Hast du die Fragen richtig beantwortet?* ähnlich, weshalb bei dieser Station keine Schwierigkeiten auftraten.

Die Bewertung kann mit der ersten Station mit 19 „Daumen hoch” und einem „Daumen runter” mithalten.

6.2.3 Station Kürzen

Die Station Kürzen beginnt mit dem Merksatz zum Kürzen, der sich auf den bei Schillinger verwandten stützt (vgl. Schillinger 2007: S. 9) und den die Schüler in ihr Heft übertragen sollen.

Anschließend gibt es ein im Wiki integriertes Quiz *Wie oft und mit welchen Zahlen kannst du einen Bruch kürzen?*, dass sich sowohl von der grafischen Oberfläche als auch von der Art der Anzeige, ob eine Frage richtig oder falsch beantwortet wurde, von den bisherigen unterscheidet. Da der Inhalt der Fragen jedoch nicht nur zum Überprüfen des Verständnisses dient, sondern auch weitere wichtige Aspekte des Kürzens umfasst, wurde das zugehörige Quiz in den Lernpfad eingefügt. Zur Beantwortung der ersten beiden Fragen sollen die Schüler die gemeinsamen Teiler von Zähler und Nenner der Brüche $\frac{4}{8}$ und $\frac{1}{8}$ finden und bestimmen, wofür je drei Antworten zur Auswahl stehen. Die nächste Frage versucht indirekt einen vollständig gekürzten Bruch anzusprechen, indem gefragt wird, was der Schüler machen würde, wenn er keinen gemeinsamen Teiler von Zähler und Nenner mehr fände. Für diese Aufgabe stehen zwei Antwortmöglichkeiten zur Auswahl. Die letzte Fragestellung beschäftigt sich damit, ob ein Kürzen mit Null ausgeschlossen ist oder nicht. Für diese Entscheidungsfrage stehen die Antworten „ja" und „nein" zur Auswahl. Nachdem die Schüler die Fragen beantwortet haben, lässt sich das Quiz prüfen und die richtigen, falschen oder nicht beantworten Fragen werden in verschiedenen Farben dargestellt. Inhaltlich werden in diesem Quiz entscheidende Aspekte der Bruchrechnung bezüglich des Kürzens (siehe Abschnitt 4.3.2: S. 45) erarbeitet oder wiederholt, als da wären: Nur mit gemeinsamen Teilern von Zähler und Nenner kürzen, mit 1 immer kürzen zu können, ohne dass sich dabei der Bruch ändert, und mit Null nicht kürzen zu können.

Das durch das Quiz bereits angesprochene vollständige Kürzen wird in einem anschließenden Merksatz, der wiederum in das Heft eingetragen werden soll, konkretisiert und erklärt. Für die Verfahrensweisen beschreibt Padberg zwei Möglichkeiten: die Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers (ggT) und anschließendes Kürzen in einem Schritt oder das schrittweise Kürzen (vgl. Padberg 2002. S. 68f.). Damit das Finden des ggT weder vorausgesetzt ist noch wiederholt werden muss, beschränkt sich der Lernpfad auf das schrittweise Kürzen. Ein darauf aufbauendes interaktives Formular *Kürzen...* erlaubt es den Schülern zu erfahren, wie schrittweise gekürzt werden kann. Dabei ist

der Bruch $\frac{132}{156}$ gegeben, der zunächst nur mit einer Zahl zwischen 2 und 10 gekürzt werden soll. Sobald diese Anweisung von den Schülern ausgeführt wurde, erscheint ein weiteres Formular mit dem Hinweis, dass noch einmal gekürzt werden kann. Je nachdem, welche Zahlen die Schüler verwenden, können so zwei oder drei Schritte zu einem angezeigten vollständig gekürzten Bruch führen. Die Comicfigur Frau Fragezeichen fasst das vollständige Kürzen in einem Satz zusammen, der sowohl auf der externen Seite als auch im Lernpfad erscheint.

Um die Schüler auf Stegreifaufgaben oder Schulaufgaben vorzubereiten, in denen sie unter Zeitdruck stehen, werden im Anschluss an das vollständige Kürzen die wichtigsten Teilbarkeitsregeln (siehe Anhang D.6: S. 165) wiederholt. Dabei werden die Regeln für die Zahlen 2, 3, 4, 5, 8, 9 und 10 angegeben (vgl. Stark 2006: S. 7) und die in einem anschließenden Quiz, das aus fünf Aussagen, die auf Richtigkeit geprüft werden sollen, aufgefrischt werden sollen. Nach diesem Ausflug geht es wieder zurück zum Lernpfad.

Probleme und Bewertungen der Schüler

Obwohl diese Station inhaltlich anspruchsvoll war, war sie für die Schüler schnell zu bearbeiten. Die in das Wiki integrierten Quize erforderten einige Geduld bei den Schülern, da hier zwischen dem Anklicken des Korrektur-Buttons und der Anzeige der Lösung einige Zeit verging.

Die Bewertung dieser Station fiel mit 17 „Daumen hoch" und vier „Daumen runter" etwas schlechter als die vorhergehende aus.

6.2.4 Station Übungen zum Kürzen

Dass zur Vertiefung des Kürzens verschiedene und variationsreiche Aufgaben nötig sind, wurde bereits erwähnt (siehe Abschnitt 4.3.2: S. 45). Auch Weigand weist darauf hin, dass nur anhand mehrerer gleichartiger Aufgaben wirklich geübt werden könne (vgl. Weigand o. J.: S. 6). Die Auswahl der vorliegenden Aufgaben bezieht sich u.a. auf die Vorschläge von Brunnermeier et al. (vgl. Brunnermeier 2004: S. 19) sowie die des Schülerarbeitsheftes (vgl. Schillinger 2007: S. 9). Fünf Aufgabentypen wurden ausgewählt, die zu vier Übungen zusammengefasst wurden.

Erste Übung

Die Aufgabe *Brüche kürzen* (siehe Anhang D.7.1: S. 167) ist in die zwei Schwierigkeitsstufen leicht und mittelschwer eingeteilt und bildet die erste Übung. Dabei müssen die Schüler einen zu ihnen passenden Schwierigkeitsgrad wählen und dann je sechs Aufgaben mit der Aufgabenstellung „Kürze mit ..." (vgl. Brunnermeier et al. 2004: S. 23) lösen, die einzeln auf Richtigkeit geprüft werden können. Sind alle sechs Aufgaben richtig gelöst, erscheint das den Schülern bereits bekannte Ausrufezeichen mit einem lobenden Ausspruch und einem großen „Daumen hoch". Die Schwierigkeitsstufen unterscheiden sich hier nur durch größere angegebene Zahlen, die für schnelle Schüler eine Herausforderung sein sollen. Außerdem wurde darauf geachtet, dass der zu kürzende Bruch mal rechts und mal links des Gleichheitszeichens steht, damit keine Eintönigkeit entsteht.

Zweite Übung

Der Aufgabentyp *Mit welcher Zahl wurde gekürzt?* (siehe Anhang D.7.2: S. 168) bildet zusammen mit dem Quiz *Findest du die passende Zahl?* (siehe Anhang D.7.3: S. 169) die zweite Übung. *Mit welcher Zahl wurde gekürzt* ist der leichte Aufgabentyp dieser Übung, das Quiz *Findest du die passende Zahl?* ist in die Kategorien mittelschwer und schwer unterteilt. Auch hier müssen sich die Schüler einen Schwierigkeitsgrad auswählen und diesen bearbeiten.

Der leichte Aufgabentyp beschränkt sich darauf, dass die Schüler in sechs Aufgaben die Kürzungszahlen[48] eintragen müssen. (vgl. Brunnermeier et al. 2004: S. 23) Dabei wurde darauf geachtet, dass diese Eintragungen an verschiedenen Positionen, beispielsweise auf der rechten und auf der linken Seite des Gleichheitszeichen, vorgenommen werden, damit so produktiv geübt werden kann (vgl. Weigand o. J.: S. 6f.).

Der mittelschwere und schwere Aufgabentyp orientiert sich an Schätz / Eisentraut (vgl. Schätz / Eisentraut 2004: S. 27). Dabei wurde die Idee aufgegriffen, mit Hilfe von Abbildungen das Kürzen darzustellen. Die mittelschwere Aufgabe zeigt nacheinander drei Fragen mit je einer Abbildung, die das Kürzen veranschaulicht. Jede Frage stellt drei Antwortmöglichkeiten zur Auswahl, die die Abbildung wie folgt beschreiben: „$\frac{4}{8}$ gekürzt mit 4 ergibt $\frac{1}{2}$". Der schwere Aufgabentyp enthält die gleichen Fragen wie der mittelschwere. Die drei

[48] Diesen Begriff verwendet auch Padberg (vgl. Padberg 2002: S. 68).

Antwortmöglichkeiten beschränken sich jedoch nur darauf, mitzuteilen, mit welcher Zahl gekürzt wurde.

Dritte Übung

Das interaktive Quiz *Richtig oder falsch?* (siehe Anhang D.7.4: S. 171) ist die dritte Übung und besteht aus sechs Aufgaben, bei denen die Schüler entscheiden müssen, ob bei einer gegebenen Aussage richtig oder falsch gekürzt wurde. Diese Aufgabe ist als mittelschwer gekennzeichnet, doch dadurch, dass es sich bei dieser Aufgabe um ein Quiz handelt, ist eine erfolgreiche Bearbeitung für alle Schüler möglich. Diese Übung orientiert sich wiederum an Padberg (vgl. Padberg 2002: S. 66) und nimmt zusätzlich von ihm ausgewiesene Fehlerquellen, wie die Dominaz spezieller Gleichungen (siehe Abschnitt 4.5: S. 50), mit auf.

Vierte Übung

Der Aufgabentyp *Kürze vollständig* (siehe Anhang D.7.5: S. 172) ist in die Schwierigkeitsstufen mittelschwer und schwer eingeteilt. Die mittelschwere Aufgabe besteht aus vier Formularen. Dabei müssen die gegebenen Brüche vollständig gekürzt werden. Trägt ein Schüler einen richtig gekürzten, aber noch nicht vollständig gekürzten Bruch in ein Formular ein und prüft dieses, so erhält er den Hinweis, dass noch weiter gekürzt werden kann. Das bisherige Ergebnis des Schülers bleibt in dem Formular stehen, damit er sich überlegen kann, mit welcher Zahl er weiter kürzen möchte. Die schwere Aufgabe hingegen enthält nur drei Formulare. Dafür sind die Zahlen im Zähler und Nenner der gegebenen Brüche größer. Ansonsten ist sie vergleichbar mit der mittelschweren Aufgabe. Dieser Aufgabentyp wurde in Anlehnung an die Übung von Schätz / Eisentraut erstellt, nach welcher gegebene Brüche gegebenenfalls in mehreren Schritten vollständig gekürzt werden (vgl. Schätz / Eisentraut 2004: S. 28).

Probleme und Bewertungen der Schüler

Die letzte Station wurde von den Schülern mit dem gleichen Engagement bearbeitet wie der bisherige Lernpfad „Brüche kürzen". Allgemein konnte man feststellen, dass sich die Schüler mit diesem Lernpfad besser und effektiver beschäftigt haben als mit dem vorhergehenden. Sowohl die Ergebnisse des Tests

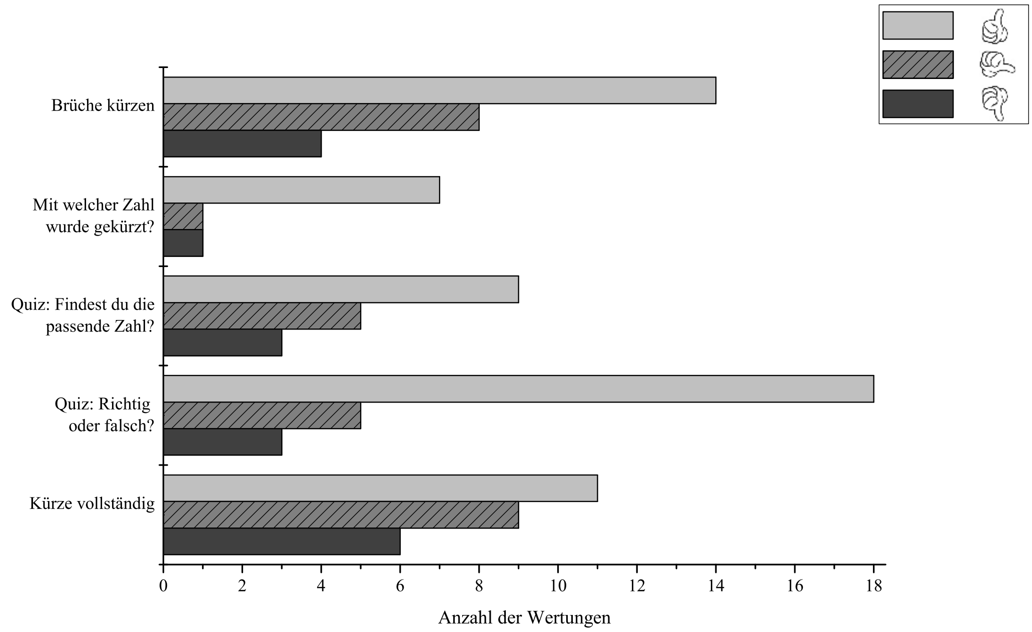


Abbildung 6.3: Bewertungen der Aufgaben zum Kürzen.

(siehe Abschnitt 9: S. 103) als auch einige andere Voraussetzungen für die Durchführung der einzelnen Unterrichtsstunden könnten als Begründung hierfür aufgeführt werden (siehe Abschnitt 8.1.1: S. 97). Allein die Tatsache, dass den Schülern mitgeteilt wurde, dass es um eine freiwillige Note in einem anschließenden Test ginge, ließ die Klasse verstummen und steigerte ihr Arbeitstempo. Dies zeigt, dass diese Schüler erst dann entdeckend lernen, wenn sie dem üblichen Notendruck ausgesetzt sind, der eigentlich nicht für diese Unterrichtsmethode vorgesehen ist (siehe Abschnitt 3.2.2: S. 31).

Die Bewertung dieser Station weicht von der bisherigen ab, da die Schüler hier all die Aufgaben beurteilen sollten, die sie gelöst haben. Das heißt, es wurden von den fünf Aufgaben vier bewertet. Die Abbildung 6.3 zeigt die Bewertungen im Überblick. Dabei fällt besonders positiv das Quiz *Richtig oder falsch?* und besonders negativ die Aufgabe *Kürze vollständig* auf.

6.3 Lernpfad „Brüche vergleichen”

Der Lernpfad „Brüche vergleichen” (siehe Anhang E: S. 175) versucht die oben genannten Inhalts- und Prozessziele (siehe Abschnitt 5.2: S. 55) mittels interaktiver, zum entdeckenden Lernen anregender Inhalte umzusetzen. Dieser

Lernpfad ist ein Anwendungslernpfad, der in erster Linie auf die Lernpfadgruppe zugeschnitten worden ist. Spezielle Methoden des Größenvergleichs von Brüchen[49] oder das Verfahren zur Bestimmung eines Hauptnenners[50] wurden nicht aufgenommen. Nur die klar zu definierenden Verfahren und die Möglichkeit, über den Hauptnenner Brüche zu vergleichen, sind in diesem Lernpfad umgesetzt. Dafür wurden die folgenden Stationen gestaltet und ausgearbeitet.

6.3.1 Station 1. Regel

Auch Fuchs beginnt den Größenvergleich, wie im vorliegenden Lernpfad, mit einem Vergleich von Stammbrüchen (vgl. Fuchs 2000: S. 7). Dazu soll ein interaktives Applet mit einem Zahlenstrahl benutzt werden, auf dem durch Schieberegler einstellbare Brüche platziert werden können. Drei Aufgaben, in denen das Größer- bzw. Kleinerzeichen in ein Formular einzusetzen ist, sollen mit Hilfe dieses Applets gelöst werden. Nachdem die Schüler sich während der Bearbeitung dieser Aufgabe Gedanken darüber gemacht haben, ob hinter dem Vergleich der drei Bruchpaare eine Regel steckt, können sie ihre Vermutungen auf der Lernpfadseite durch einen eingerahmten Hilfsmerksatz hinterfragen. Dieser beinhaltet nicht nur die Regel im Wortlaut für den Vergleich von Stammbrüchen, sondern zeigt gleichzeitig ein anschauliches Beispiel, das die Schüler an das Größenkonzept erinnern soll und das Dlugosch in seine Aufgabensammlung zum Größenvergleich ebenfalls integriert (vgl. Dlugosch et al. 2004: S. 20). Auch wenn die Unterscheidung zweier Brüche in diesem Lernpfad nicht über die Vorstellung von verschieden großen Bruchstücken eingeführt wird, ist sie anschaulich ein wichtiger Aspekt, der den Schülern für ein besseres Verständnis dienen kann (siehe Abschnitt 4.4.1: S. 46). Daher wird in diesem ersten kleinen Merksatz davon Gebrauch gemacht. Mit dieser Einstiegssaufgabe wird das Finden der ersten Regel zum Größenvergleich für Brüche mit gleichem Zähler eingeleitet.

Bei der folgenden interaktiven Aufgabe sollen die Schüler mit Hilfe eines GeoGebra-Applets herausfinden, ob die zuvor entdeckte Regel nur für Stammbrüche oder ob sie vielleicht noch für weitere Brüche gilt. Bei Brunnermeier

[49] Vgl. dazu die Ideen von Winter, der vorschlägt, die zu vergleichenden Brüche auf bereits bekannte zurückzuführen (siehe Abschnitt 4.4.2: S. 49) sowie die Umrechnung in Dezimalbrüche oder das Ausnutzen der Monotoniegesetze anzuwenden (siehe Fußnote 31: S. 48).

[50] Für Hinweise und Regeln, wie der Hauptnenner zu bestimmen ist, siehe Padberg (vgl. Padberg 2002: S. 79).

et al. wird dieser Aspekt des Größenvergleiches zu Beginn des Kapitels innerhalb eines Arbeitsauftrages eingeführt. Mittels anschaulicher Kuchenmodelle kommt er zu dem selben Schluss wie der Lernpfad, dass „bei Brüchen mit gleichen Zählern derjenige Bruch größer [ist], der den kleineren Nenner besitzt" (Brunnermeier et al. 2004: S. 153). Zwei Fragen, die die Schüler zum Entdecken dieses Aspektes anregen sollen und die einen Vergleich von je zwei Brüchen als Aufgabe stellen, können mit dem integrierten Applet selbstständig herausgefunden und bearbeitet werden. Dafür gibt es, ähnlich wie schon in den vorherigen Lernpfaden, zwei Rechtecke, bei denen es über Schieberegler möglich ist zwei Brüche einzustellen, und die man übereinander schieben kann, um die eingestellten Bruchteile zu vergleichen. Die Antworten auf die Fragen sollen sich die Schüler auf ihrem Laufzettel notieren, damit sie sich anschließend eigenverantwortlich korrigieren können. Anders als bisher erfolgt das Überprüfen der Lösungen nicht mit einem Quiz, sondern mit der sogenannten „Verstecken-Funktion" des Wikis. Dafür wurden unterhalb des Applets die Fragen aufgelistet, neben denen sich die Lösungen anzeigen und wieder verbergen lassen. An dieser Stelle wird nicht geprüft, ob die Schüler die Lösungen schon zu Beginn der Aufgabe betrachten, das wäre nicht im Sinne des entdeckenden Lernens (siehe Abschnitt 3.2.2: S. 29). Ziel der beiden Fragen ist es, dass die Schüler darüber nachdenken, ob sie eine Regel für Brüche mit dem selben Zähler finden können. Eine mathematische Formulierung dieser gefundenen Regel wird in der Aufgabenstellung nicht explizit verlangt; bei der Kontrolle der Laufzettel zeigte sich jedoch, dass viele Schüler dies versuchten. Im Anschluss an die Überprüfung wird den Schülern die erste Regel zum Größenvergleich präsentiert, die wiederum versteckt ist und sich unter anderem an Brunnermeier et al. orientiert (vgl. Brunnermeier et al. 2004: S. 153).

Probleme und Bewertungen der Schüler

Das Problem bei dieser Station war, dass die Schüler, anders als in den bisherigen Lernpfaden, ihre Lösungen nicht durch ein interaktives Quiz überprüfen konnten, sondern dass die Antworten auf die gestellten Fragen unterhalb der Applets mit Hilfe der „Verstecken"-Funktion in den Lernpfad integriert waren. Bei der Durchsicht der Laufzettel stellte sich heraus, dass viele Schüler diese Lösungen wortwörtlich abgeschrieben haben, ohne auch nur zu versuchen eine eigene Formulierung zu finden. Dies wurde jedoch nach der ersten Station mit

den Schülern besprochen, so dass sie sich bei den beiden folgenden Stationen mehr um eigenständiges Handeln bemühten.

Die Bewertung dieser Station fiel mit 16 „Daumen hoch”, 3 „Daumen runter” und mit zwei nicht abgegebenen Bewertungen bisher am schlechtesten aus.

6.3.2 Station 2. Regel

Nach dieser Station folgt eine weitere, die den Vergleich von gleichnamigen Brüchen thematisiert und die den gleichen Aufbau wie die erste aufweist: Hier werden wiederum zwei Fragen gestellt, die mit einem GeoGebra-Applet beantwortet werden können. Im Unterschied zu der ersten Station können in diesem Fall die Bruchteile an Kreisen eingestellt werden, die sich ebenfalls übereinander schieben lassen. Auch die Verbesserungen der Lösungen, die die Schüler auf ihrem Laufzettel festhalten müssen, sind analog gestaltet. Die Laufzettel zeigten, dass die Schüler bei dieser Station gleichermaßen bemüht waren, eine Regel zu formulieren. Der Inhalt stützt sich auf den Spezialfall des Größenvergleichs von Brüchen, wie ihn Brunnermeier et al. beschreibt (vgl. Brunnermeier et al. 2004: S. 155). Der anschließende versteckte Merksatz greift die Theorie Padbergs auf (vgl. Padberg 2002: S. 79), formuliert sie jedoch in Anlehnung an Fuchs schülergerecht um (vgl. Fuchs 2000: S. 9). Auch hier wird den Schülern vertraut und nicht geprüft, ob sie die Lösung bereits vorher angesehen haben.

Probleme und Bewertungen der Schüler

Diese Station wurde von den Schülern besser bearbeitet als die erste, da zum einen der Aufbau aus der ersten Station bereits bekannt war und da zum anderen ein Größenvergleich mit gleichnamigen Brüchen anschaulicher und leichter zu fassen ist.[51]

Die Bewertung dieser Station änderte sich im Vergleich jedoch nicht, da die Schüler wirklich versuchten eigenständige Regeln zu formulieren, wodurch der Schwierigkeitsgrad erhöht wurde. 17 „Daumen hoch” und 3 „Daumen runter” wurden auf den Laufzetteln angekreuzt.

[51] Padberg lässt sogar eine Regel zum Vergleich von Brüchen mit gleichem Zähler ganz weg.

6.3.3 Station 3. Regel

Die dritte und letzte Station macht zunächst den Anschein, dass sie wie die vorherigen aufgebaut ist. So müssen die Schüler mit Hilfe des Zahlenstrahls, der durch ein interaktives Applet in den Lernpfad integriert ist, herausfinden, welcher von zwei beliebigen Brüchen der größere ist. Sowohl der Aufbau der Fragen und die Anweisung, die jeweiligen Lösungen auf dem Laufzettel zu notieren, als auch die anschließende Überprüfungsmöglichkeit sind in Anlehnung an die ersten beiden Stationen erstellt worden. Der Unterschied besteht diesmal darin, dass es den Schülern anhand der gestellten Aufgaben nicht möglich ist, eine adäquate Regel für den Vergleich von beliebigen Brüchen zu formulieren, auch wenn die Laufzettel zeigen, dass dies die Schüler trotzdem versuchten. An dieser Stelle im Lernpfad erscheint Frau Fragezeichen, die wohl weiß, dass so noch keine Regel möglich ist, die die Schüler aber auf die Fährte des Hauptnenners lockt. Ohne den Begriff des Hauptnenners oder die Gleichnamigkeit von Brüchen zu kennen, sollten die Schüler von einer Aufgabe, nämlich *Erweitere auf den gleichen Nenner,* aus dem Lernpfad „Brüche erweitern" bereits eine Vorahnung haben. Ähnlich geht auch Fuchs vor, der die Lösung eines Vergleichs von zwei ungleichnamigen Brüchen mit Hilfe der sogenannten Bruchrechenkreise, die die Schüler ausschneiden und übereinanderlegen können, anregt. Auch hier wird festgestellt, dass ohne Übereinanderlegen noch keine Regelmäßigkeit festgestellt werden kann (vgl. Fuchs 2000: S. 9).

Die im Lernpfad anschließende Definition von gleichnamigen Brüchen und die des Hauptnenners wird eingeführt und soll von den Schülern in die Hefte eingetragen werden. Diese Formulierungen stehen im Zusammenhang mit denen von Buchner et al. verwandten (vgl. Buchner et al. 2002: S. 22). Wenn es eine Möglichkeit gibt, beliebige Brüche gleichnamig zu machen, dann wird keine weitere Regel benötigt, da es bereits eine Regel für Brüche mit dem selben Nenner gibt: die zweite Regel (siehe Abschnitt 4.4.2: S. 48). Damit die Schüler anhand eines Beispiels dieses Verfahren kennen lernen und es im Lernpfad nicht untergeht, wird dennoch eine dritte Regel als Merksatz formuliert. Da dieses Verfahren sehr algebraisch ist, wurde hier zum ersten Mal auf ein zusätzliches anschauliches Beispiel verzichtet. Dieser Aspekt ist der wichtigste des Lernpfades, da dieser als Anwendung der Lernpfade „Brüche erweitern" und „Brüche kürzen" zu verstehen ist und über die Regel des Hauptnenners mit diesen beiden verbunden wird.

Probleme und Bewertungen der Schüler

An der dritten Station wurde von den Schülern kritisiert, dass zu viel Text zu lesen war. Eine andere Sorge aus dem Vorfeld, ob es sinnvoll sei, ein Verfahren zur Bestimmung des Hauptnenner in den Lernpfad zu integrieren, war überflüssig gewesen, denn die Schüler störten sich nicht daran, dass sie kein vorgefertigtes Verfahren vorfanden. Bei manchen Schülern regte das Fehlen eines sturen Algorithmus geradezu einen Entdeckerwillen für die folgenden Aufgaben an.

Mit 17 „Daumen hoch” und 2 „Daumen runter” wurde diese Station am besten bewertet.

6.3.4 Station Übungen zum Hauptnenner und zum Größenvergleich

Die Auswahl der vorliegenden Aufgaben bezieht sich unter anderem auf die Vorschläge von Buchner et al. (vgl. Buchner et al. 2002: S. 22f.) sowie die des Schülerarbeitsheftes (vgl. Schillinger 2007: S. 10). Fünf Aufgabentypen wurden ausgewählt, die zu vier Übungen zusammengefasst wurden.

Erste Übung

Die erste Übung *Erweitere auf einen gemeinsamen Nenner* (siehe Anhang F.2.1: S. 185 und vgl. Buchner et al. 2002: S. 23) besteht aus drei Formularen mit je zwei zu erweiternden Brüchen. Diese Übung ist, wie im Text bereits erwähnt, ähnlich der Aufgabe des Lernpfades „Brüche erweitern”, nur mit dem Unterschied, dass dieses Mal nicht angegeben wurde, wie der gemeinsame Nenner lautet. Zum einen haben die Schüler auf diese Weise viele verschiedene Möglichkeiten die Aufgabe richtig zu lösen, ohne sich dabei Gedanken über den Hauptnenner machen zu müssen. Didaktisch gesehen steht hinter dieser Aufgabe die grundlegende Information, die die Schüler bereits aus dem Lernpfad „Brüche erweitern” kennen sollten, nämlich dass man mit einer beliebigen natürlichen Zahl erweitern kann. Dadurch wird die erste Übung einerseits zur Wiederholungsaufgabe und andererseits führt sie langsam in die Thematik „Brüche vergleichen” ein.

Zweite Übung

Um an der ersten Übung anzuknüpfen, ist die zweite Übung *Erweitere auf den Hauptnenner* (siehe Anhang F.2.2: S. 186 und vgl. Buchner et al. 2002: S. 23) genauso aufgebaut, wie die vorherige. Wie der Titel jedoch schon vermuten lässt, wird bei dieser Übung nicht nur verlangt, die Brüche auf einen gemeinsamen Nenner zu erweitern, sondern sie auf den Hauptnenner zu bringen. Damit an dieser Stelle die Schüler nicht in ihren Heften oder in dem Lernpfad nachsehen müssen, wie der Hauptnenner definiert ist, wurde in der Aufgabenstellung beschrieben, dass dieser der kleinste mögliche gemeinsame Nenner ist. Außerdem gibt das interaktive Formular einen entsprechenden Hinweis, falls ein Schüler zwar richtig erweitert, den Hauptnenner aber leider nicht richtig herausgefunden hat.

Dritte Übung

Nach diesen Wiederholungs- bzw. Einstiegsaufgaben kann nun der Größenvergleich geübt werden. Für die dritte Übung wurden dafür die folgenden Aufgabentypen ausgewählt: das Quiz *Richtig oder falsch?* (siehe Anhang F.2.3: S. 187) ist dabei der einfache Aufgabentyp, die interaktive Aufgabe *Welcher Bruch ist größer?* (siehe Anhang F.2.4: S. 188) der mittelschwere.

Das Quiz wurde vor dem Hintergrund einer Aufgabe bei Fuchs (vgl. Fuchs 2000: S. 10) so umgewandelt, dass der Schüler bei vier aufeinander folgenden Fragen, die je zwei oder mehr Brüche in einer Größer- bzw. Kleinerrelation zeigen, entscheiden muss, ob die dargestellten Aussagen mit wahr oder falsch zu beantworten sind. Die mittelschwere Aufgabe, die in Anlehnung an eine bei Brunnermeier et al. gestellte erstellt wurde (vgl. Brunnermeier et al. 2004: S. 152), stellt sechs Formulare bereit: Für jede im Lernpfad behandelte Regel gibt es zwei Formulare. Zunächst steht nichts zwischen den zwei gegebenen Brüchen, klickt man jedoch auf das Pull-Down-Menü, kann man zwischen dem Größer- oder Kleinerzeichen auswählen, so dass eine richtige Aussage entsteht.

Vierte Übung

Die letzte Übung (siehe Anhang F.2.5: S. 189) dieser Lernpfadgruppe besteht aus einer mittelschweren und einer schweren Aufgabe. Bei dem mittelschweren *Größenvergleich* müssen vier Brüche der Größe nach angeordnet werden, beginnend mit dem kleinsten (vgl. Schillinger 2007: S. 10). Dafür können die

Brüche in einem interaktiven GeoGebra-Applet auf einer Linie positioniert werden, wobei die Brüche von links nach rechts größer werden. Damit die Schüler nicht im Kopf große Rechnungen durchführen oder sich auf einem Schmierzettel Nebenrechnungen notieren müssen, gibt es rechts neben dem Applet die Möglichkeit in einem weiteren GeoGebra-Applet je zwei Brüche miteinander zu vergleichen. Auf diese Weise sollte es für alle Schüler möglich sein die mittelschwere Aufgabe zu lösen. Der schwere *Größenvergleich* unterscheidet sich nur in der Anzahl der zu ordnenden Brüche. Anstatt vier Brüche sind es hier sechs, die zudem alle kleiner sind als 1; ein Bruch kann nur in der nebenstehenden Hilfe angezeigt werden, wenn der Schüler daran denkt, ihn vorher zu kürzen. Alle diese Kleinigkeiten rechtfertigen, dass diese Aufgabe schwerer ist.

Haben die Schüler diese letzte Übung erfolgreich bearbeitet, so erscheint eine zusammenfassende Seite (siehe Anhang F.3: S. 191), die den Schülern zunächst zum Bestehen der Lernpfadgruppe gratuliert, um ihnen anschließend in drei Sätzen vor Augen zu führen, was sie nach Bearbeitung dieser Lernpfadgruppe alles können: Brüche erweitern, kürzen und vergleichen.

Probleme und Bewertungen der Schüler

Die letzte Station wurde von den Schülern rasch bearbeitet. Dass sowohl die Aufgaben die Schüler nicht zu sehr zu fordern schienen, als auch der Gedanke, endlich die Lernpfadgruppe beenden zu können, trieb die Schüler an. Bei dem letzten Lernpfad konnte man allgemein feststellen, dass sich die Schüler nicht mehr ganz so sehr konzentrierten und dadurch unruhiger wurden. Dies wurde sicherlich dadurch begünstigt, dass die Schüler die Lernpfade „Brüche kürzen” und „Brüche vergleichen” in einer Doppelstunde bearbeiteten.

Die Bewertung dieser Station weicht von der bisherigen ab, da die Schüler hier nur die Aufgaben beurteilen sollten, die sie gelöst haben. Das heißt, es wurden von den fünf Aufgaben vier bewertet. Die Abbildung 6.4 auf der nächsten Seite zeigt die Bewertungen im Überblick. Dabei fällt besonders positiv die interaktive Aufgabe *Erweitere auf einen gemeinsamen Nenner* und eher negativ die Aufgabe *Erweitere auf den Hauptnenner* auf.

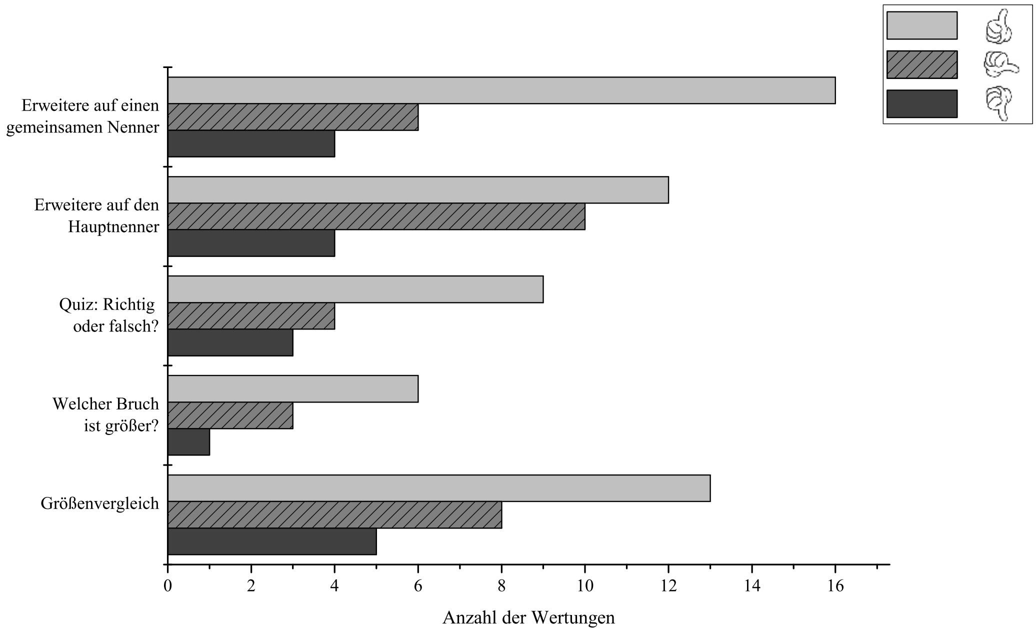


Abbildung 6.4: Bewertungen der Aufgaben zum Größenvergleich.

Kapitel 7

Probleme bei der Erstellung

7.1 Problem der Bruchdarstellung

Dass sich mathematische Formeln nicht ohne weiteres in HTML darstellen lassen und dass sie deshalb oft „auf Internetseiten als Grafiken (meist GIF oder PNG) angezeigt [werden]" (Pavel 2007: PHP-Formeleditor zur Herstellung mathematischer Formeln in HTML, o. S.), wird beispielsweise von Pavel beschrieben. Er gibt weiterhin an, dass diese Darstellungsweise folgende Nachteile mit sich bringt. Entweder passen die verwendeten Schriftarten – beispielsweise diejenigen im Fließtext und diejenigen der Grafik – nicht zusammen oder eine Größenänderung der Grafiken lässt sie verpixelt und nicht leserfreundlich wirken (vgl. Pavel 2007: PHP-Formeleditor zur Herstellung mathematischer Formeln in HTML, o. S.). Auch in den Lernpfaden kam die Frage nach einer Umsetzung von mathematischen Formeln auf. Die Schwierigkeiten, die im Wiki entstanden, werden an späterer Stelle aufgeführt (siehe Abschnitt 7.2.2: S. 91). Zunächst soll hier die Problematik der Darstellung von mathematischen Formeln, insbesondere von Brüchen, in den Quizen geschildert werden.

Ursprünglich sollte die Software „Hot Potatoes"[52] für die Erstellung der Quize im Lernpfad hergenommen werden. Da die von Pavel beschriebenen Schwierigkeiten des Einbindens von mathematischen Formeln auch in dieser auf HTML-Code basierenden Software unumgänglich waren, wurde in Anlehnung an das Hot Potatoes-Quiz und in Anlehnung an eine von Pavel bereits umgesetzten Idee,[53] eine interaktive Quiz-Umgebung implementiert.

[52] Weitere Informationen zu der Software und ihren Einsatzmöglichkeiten sind auf der folgenden Homepage http://hotpot.uvic.ca/index.htm zu finden.

[53] Pavels Idee zufolge sollen mathematische Formeln direkt mit einem Skript in HTML

Diese ermöglicht dem Aufgabensteller zusätzlich zu den bekannten Funktionen, die die Hot Potatoes-Software bietet, eine leichtere Eingabe von Brüchen. Oliver Knoch stellte diese interaktive Quiz-Umgebung für die Lernpfadgruppe zur freien Verfügung.

7.2 Schwierigkeiten im Wiki

7.2.1 Fehlende Javascript-Unterstützung

Da der Lernpfad interaktive Elemente, Bilder und Texte so verbinden soll, dass eine schülerfreundliche E-Learning Lernumgebung entsteht, gestaltete sich das Einbinden des Lernpfads in das Wiki an einigen Stellen schwierig.

Das Wiki bietet selbst zwar interaktive Elemente, wie Quize oder die Möglichkeit, GeoGebra-Applets einfügen zu können, jedoch fehlte zum Zeitpunkt des Erstellens des Lernpfades die Möglichkeit, Javascript-Code zu verwenden. Dadurch können zum einen die eingebundenen Applets nicht interaktiv geprüft werden und zum anderen müssen interaktive Elemente wie Puzzles oder interaktive Aufgaben auf externe Seiten ausgelagert werden. In Folge dessen musste auf die Gestaltung geachtet werden, damit die externen Links nicht nur aufgelistet, sondern in den Lernpfad integriert sind. Weiterhin ergaben sich aus dieser fehlenden Möglichkeit, neue interaktive Elemente in den Lernpfad zu integrieren, weitere Nachteile, die bei dem Problem der Ladezeiten (siehe Abschnitt 7.4: S. 92) näher erörtert werden.

7.2.2 Wenige Gestaltungsmöglichkeiten

Die Arbeit in einem Wiki soll es Benutzern erleichtern Internetseiten zu erstellen und online zu ergänzen oder zu verbessern. Dadurch wird das Verfassen und Veröffentlichen von hauptsächlich aus Text bestehenden Internetartikeln vereinfacht. Um jedoch einen schülergerechten Lernpfad in ein Wiki einzubinden, müssen zusätzliche Gestaltungselemente eingebaut werden und es muss die Möglichkeit bestehen, vorhandene Elemente anpassen zu können.

---

erstellt werden statt Formeln als Grafiken einzubinden. Dazu setzt Pavel die Skriptsprache PHP ein. Das in meinem Lernpfad verwendete Quiz verwendet ausschließlich die Skriptsprache Javascript. Die Gründe für diese Wahl werden an anderer Stelle deutlich gemacht (siehe Abschnitt 7.5: S. 94).

Schon beim Einsatz von mathematischen Formeln sind dem Benutzer des Wikis Grenzen gesetzt. Zwar kann im Quellcode mit dem Tag `<math>` einfacher LaTeX-Formelcode in den Fließtext eingefügt werden, so dass beispielsweise auch Brüche eingebaut werden können. Dieser LaTeX-Formelcode wird jedoch als Pixelgrafik generiert, die nicht ohne weiteres durch den Benutzer angepasst oder in der Größe verändert werden kann. Diese Grafik erscheint bei der üblichen Monitorauflösung von 96dpi mehr als doppelt so groß wie der Fließtext und ist zudem zu nahe an diesem platziert, so dass erst ein umständliches und mehrmaliges Einfügen des geschützten Leerzeichens ` ` zu einem lesbaren Ergebnis führt.

Auch der Text kann nicht optimal formatiert werden. Obwohl beispielsweise die Schrift mit Hilfe von Tags zusätzlich zur vom Wiki gewählten Standardgröße in die Größen klein und groß einstellbar ist, wird ausdrücklich auf den Seiten des Wikis darauf hingewiesen, dass die eingestellte Schriftgröße beibehalten werden sollte (vgl. ZUM Internet e.V. 2006: Textgestaltung, o. S.). Zudem ist die Länge einer Textzeile nicht ohne Umstände variierbar. Bei längeren Textabschnitten entstehen ohne manuelle Zeilenumbrüche nur wenige, dafür jedoch sehr lange Zeilen, die die Leselust von jüngeren Schülern kaum ansprechen können. Auch Böhringer et al. weisen darauf hin, dass zu lange Textzeilen dazu führen, dass „der Leser [...], ohne zu wissen warum, die Lust am Lesen des Textes [verliert]” (Böhringer et al. 2008: S. 204).

7.2.3 Bilder im Wiki

Mit Bildern kann man Artikel und auch Lernpfade im Wiki optisch ansprechender gestalten. Leider lassen sich diese Bilder anklicken, wodurch man auf die Informationsseite zu dem einzelnen Bild gelangt. Zwar ist es notwendig, nachvollziehen zu können, wer dieses Bild eingestellt hat, welche Quelle derjenige verwandt hat oder auch wozu das Bild dient, jedoch kann diese Funktion nicht abgestellt werden. Bilder, die speziell in Lernpfaden zu einem externen Link oder auch zu einem Link innerhalb der Wiki-Seiten gehören und damit beispielsweise als Vorschau dienen, werden jedoch intuitiv von den Benutzern eines Lernpfades oder von den Lesern eines Artikels angeklickt werden, um so auf diese neue Seite zu gelangen.

7.3 Schwierigkeiten mit GeoGebra

Zum Zeitpunkt der Erstellung des Lernpfades ist es in GeoGebra nicht möglich gewesen, die Lage von selbst eingefügten Bildern mit Hilfe der Javascript-Schnittstelle zu prüfen. Die Bilder mussten deshalb zunächst an einem Punkt fixiert werden, um dann durch diesen Punkt ein Polygon zu definieren, dass dem Umriss des eingefügten Bildes ähnelt. Die Lage dieses Polygons, genauer gesagt, die Lage der Eckpunkte des Polygons konnten dann mittels der Javascript-Schnittstelle geprüft werden, so dass es möglich wurde die interaktiven Aufgaben zu prüfen, da dort verschiedene Bilder in bestimmte Rechtecke sortiert bzw. verschoben werden sollten.

Der Nachteil dieses Verfahrens ist, dass die erfolgte Implementierung schon bei einem Eckpunkt, der sich nicht im zu überprüfenden Rechteck befindet, die Lösung der Aufgabe als falsch ansieht. Im Nachhinein wäre eine Prüfung wie beispielsweise auf eine Mindestanzahl an Eckpunkten anstatt aller Eckpunkte sinnvoller gewesen, da so die einzelnen Bilder nicht so exakt hätten positioniert werden müssen.

7.4 Problem der Ladezeiten

Während der Erstellung der Lernpfade wurden die Ladezeiten sowohl für die externen Seiten als auch für die Lernpfade immer länger. Nach verschiedenen Tests mit unterschiedlichen Browsern und Betriebssystemen wurde die Vermutung bestärkt, dass der unter Windows von GeoGebra verbrauchte Speicher von Java einbehalten wird, sogar beim Seitenwechsel innerhalb der Browser-Historie[54]. Durch die steten Wechsel von externen Seiten zurück zum Lernpfad und umgekehrt wurde dabei die Speicherkapazität so schnell aufgebraucht, dass abzusehen war, dass in einer Unterrichtsstunde von 45 Minuten, unabhängig von der Schnelligkeit der Schüler, die meisten Browser abstürzen würden.[55]

Um dieses Problem zu umgehen, sollten die externen Links in einem neuen Fenster oder Tab geöffnet werden, damit der Lernpfad und insbesondere die

[54] Auch wenn der „Zurück-Button" des Browser-Fensters verwendet wird, werden die GeoGebra-Applets neu geladen und zusätzlicher Speicher wird belegt.

[55] Dieses Problem wurde sowohl im GeoGebra-Forum zur Diskussion gestellt (siehe dazu http://www.geogebra.org/forum/viewtopic.php?f=5&t=4433) als auch Sun Microsystems, den Entwicklern von Java, zur Verbesserung mitgeteilt. Beide An- und Nachfragen blieben bisher jedoch ergebnislos.

[Rechtsklick:] Starte das Suchbild

[Hinweis ausblenden]

Öffne mit einem Klick auf die **rechte** Maustaste das Kontextmenü und wähle dann

"(Link) in neuem **Fenster** [!] öffnen".
Starte das Suchbild

Abbildung 7.1: Interaktives Rechtsklick-Symbol; oben eingeklappt, unten ausgeklappt.

GeoGebra-Applets bei der Rückkehr nicht neu geladen werden müssen. Im Wiki ist es aus technischen Gründen nicht möglich einzustellen, dass sich Fenster bzw. Tabs automatisch öffnen. Wenn das gewünscht ist, muss dies manuell über einen „Rechtsklick” erfolgen. Damit sich die Schüler bei allen externen Links daran erinnern, wurde in Zusammenarbeit mit Karl Kirst ein interaktives Symbol entwickelt (siehe Abbildung 7.1: S. 93), welches das Stichwort „Rechtsklick” enthält und dies auf Anklicken genauer erklärt.

Dadurch wurden die „Zurück zum Lernpfad”-Links auf den externen Seiten im Firefox-Browser funktionsunfähig, denn manuell geöffnete Fenster können in diesem Browser aus Sicherheitsgründen nicht mit Javascript geschlossen werden. Nachdem der Internet Explorer dieses Problem jedoch nicht aufweist, wurde sich an diesem Problem nicht länger aufgehalten.

7.5 Schwierigkeiten bei der Erstellung der Archiv-Version (CD-ROM)

Auch die Erstellung der Archiv-Version der Lernpfadgruppe (siehe Deckelinnenseite) verlief nicht ohne kleinere Schwierigkeiten, die nur teilweise behoben werden konnten.

Die im Wiki integrierten Quize, das Quiz im Lernpfad „Brüche kürzen” und das Quiz zu den Teilbarkeitsregeln, funktionieren auf der CD-ROM nicht. Diese Quize sind mit der Programmiersprache PHP geschrieben, so dass ein Herunterladen des Quelltextes nicht möglich ist. Auch wenn man sich den zugehörigen Quellcode im Wiki beschaffen kann, was durch die GPL[56] möglich

[56] Die Quiz-Erweiterung der MediaWiki-Software ist über die Open-Source-Lizenz GPL

ist, kann das Quiz nicht von CD-ROM gestartet werden, weil die Programmiersprache PHP nicht allein von einem Browser interpretiert werden kann.[57] Aus diesem Grund wurden sowohl die interaktive Quiz-Umgebung als auch alle weiteren externen Seiten anstatt mit PHP mit Javascript verfasst.

Während bei der Online-Version der Lernpfadgruppe der Webserver die korrekte Zeichenkodierung über das HTTP-Protokoll an den Browser mitteilt, fehlte diese Information zunächst bei den Dateien für die Archiv-Version, da diese im Browser von der CD-ROM und nicht von einem Webserver geladen werden. Deshalb mussten in den externen Dateien die Informationen zur Zeichenkodierung hinzugefügt (iso-8859-1) und die Sonderzeichen in HTML-Entities (ä ...) umgeschrieben werden, da sonst die Darstellung der Sonderzeichen je nach Betriebssystem oder Browser variiert und in den meisten Fällen falsch ist (vgl. SELFHTML e.V. 2007: Angabe zur Zeichenkodierung, o. S.).

lizenziert. Für weitere Informationen siehe http://www.mediawiki.org/wiki/Extention:Quiz.

[57]Für nähere Informationen zu der Skriptsprache PHP einschließlich der Voraussetzungen für deren Anwendung sind im „introductory tutorial" unter http://php.net/ zu finden.

Teil III

Durchführung und Evaluierung

Kapitel 8

Erfahrungen in der Schule

Die Lernpfadgruppe konnte von mir in einer Realschule in einer 6. Klasse mit 26 Schülern am 2. und 6. Oktober 2008 ausprobiert und in einem anschließenden Test evaluiert werden. Die Schüler benötigten insgesamt drei Schulstunden, um die Lernpfadgruppe vollständig zu bearbeiten. In der Folgestunde wurde dann der Test über die Lernpfadgruppe geschrieben.

8.1 Durchführung

8.1.1 Vor der Durchführung

Damit während der Durchführung keine Unterrichtszeit aufgrund technischer Probleme verloren geht, wurden die Computer in der Schule vorab getestet. Dabei stellte sich heraus, dass die Computer unterschiedliche Systemvoraussetzungen mit sich brachten. Um in dieser Schule mit der Lernpfadgruppe arbeiten zu können, war es nötig, Java auf ungefähr 20 Computern zu installieren. Da die Schule keinen Zugriff auf das Schulnetzwerk[58] hatte, musste vor jeder Unterrichtsstunde an diesen Rechnern Java temporär installiert werden.

Die Organisation des Probelaufs der Lernpfadgruppe war zu Beginn etwas unstrukturiert, was man daran erkennen konnte, dass die Schüler nicht wussten, dass sie sich an diesem Tag und auch für die weiteren Mathematikschulstunden in dem Computerraum befinden würden. Außerdem wurde den Schülern erst im Laufe der Bearbeitung der Lernpfadgruppe klar, dass die Stun-

[58]Dazu ist aus Zeit- und Effizienzgründen eine externe Person engagiert, die zu viel Geld kostet, als dass diese wegen eines Lernpfad-Probedurchlaufs bestellt und dementsprechend bezahlt wird.

den im Computerraum keine Freistunden waren, sondern dass die Lernpfade aktuellen Unterrichtsstoff beinhalteten. Um die bestmöglichen Voraussetzungen für das entdeckende Lernen zu gewährleisten (siehe Abschnitt 3.2.2: S. 31), wurde in der ersten Stunde das Ehrgefühl der Schüler geweckt, indem ich ihnen sagte, dass sie die ersten Schüler seien, die diesen Lernpfad testeten. Weiterhin wies ich darauf hin, dass die Meinung dieser Schüler wichtig sei, damit der Lernpfad verbessert werden könne und zukünftige Klassen einen verbesserten Lernpfad vorfinden könnten. Die Tatsache, dass neben der Lehrerin eine weitere Studentin in der Klasse hospitierte, so dass drei Ansprechpartner den Schülern zur Verfügung standen, förderte den Verlauf des Probedurchlaufes, da es auf diese Weise immer einer Person möglich war, den Schülern mit Rat und Tat zur Seite zu stehen.

8.1.2 Erste Stunde

Als die Schüler den Computerraum betraten, konnten sie bereits den oberen Teil des Lernpfades „Brüche erweitern" auf ihren Bildschirmen sehen, da ein manuelles, von der Lehrkraft gesteuertes Ausschalten der Schülerbildschirme nicht möglich war. Dadurch, dass die Schüler den bunten Lernpfad, die Bilder und Symbole bereits erblickten, machte sich schnell Freude, etwas ganz Neues machen zu dürfen, und Aufregung, wann sie endlich losklicken könnten, in der Klasse breit. Bevor die Schüler die Lernpfadgruppe starten durften, wurden wichtige Anweisungen zur Bearbeitung eines Lernpfades gegeben. Dazu gehörten die Klärung des Begriffes Schieberegler, das Vorgehen mit dem „Rechtsklick"[59] und der Hinweis, wozu der ausgeteilte Laufzettel gut sei und warum sie diesen sorgfältig ausfüllen sollten (siehe Abschnitt 8.2: S. 101).

Nachdem alles Wichtige geklärt wurde, konnten die Schüler loslegen. Bereits nach wenigen Minuten fiel auf, dass einige Schüler neugierig den ganzen Lernpfad betrachteten und sich sämtliche Comics anschauten; die meisten Schüler hielten sich jedoch noch an die vorgegebene Reihenfolge des Lernpfades. So wurde die erste Station von allen zügig und eigenständig bearbeitet; auch die Suche der Unterschiede auf dem Zahlenstrahl machte den Schülern Spaß. Dies ist aufgrund der Tatsache, dass die Schüler in der ersten Stunde motiviert waren und angesichts der knappen Textpassagen, kaum verwunderlich.

[59] Auf den Schulcomputern musste der Lernpfad mit Mozilla Firefox gestartet werden, da die veraltete Version des Microsoft Internet Explorers den Lernpfad technisch nicht unterstützte.

Doch schon mit den ersten Aufgaben, die nach den Kriterien des gelenkten entdeckenden Lernens konzipiert waren und deren thematischer Inhalt den Schülern neu war, traten einige Schwierigkeiten auf. Viele fragten nach, was genau sie bei den integrierten GeoGebra-Applets einstellen sollten oder ob ihre aufgeschriebene Antwort richtig sei. Gleichwohl die Antwort der Betreuer meist wortwörtlich dem schriftlichen Arbeitsauftrag des Lernpfades entsprach, reichte diese persönliche Erklärung und Hilfestellung aus, um die Aufmerksamkeit der Schüler wieder auf den Inhalt des Lernpfades zu lenken. Im Laufe der Unterrichtsstunde konnte man bei einigen Schülern wahrnehmen, dass uninteressante Seiten außerhalb des Wikis nicht bis zum Schluss oder gleich gar nicht bearbeitet wurden. Dass die Merksätze in die Hefte übertragen wurden, musste konsequent von der Lehrkraft und den Betreuern kontrolliert werden, da dies sonst kaum ein Schüler umgesetzt hätte.

Auch die Lautstärke erhöhte sich und immer mehr Partner- und Gruppenarbeit fand statt. Einerseits konnten sich die Schüler so zwar gegenseitig unterstützen, andererseits ist der Lerneffekt einer Aufgabe, die zum selber Entdecken anregen soll, aber nicht von dem betreffenden Schüler durchdacht und bearbeitet wird, geringer. Obwohl drei Betreuer für die Schüler zur Verfügung standen, reichte das nicht aus, um die Ehrlichkeit und die Selbstständigkeit aller Schüler zu kontrollieren, so dass an dieser Stelle bereits festgestellt werden kann, dass entdeckendes Lernen nur dann stattfinden kann, wenn die Schüler die Wichtigkeit des Lernstoffes erfassen und entdeckendes Lernen im Unterrichtalltag öfter angewandt wird. Positiv fiel auf, dass die letzte Station mit den Übungen zum Erweitern von Brüchen, trotz der zwischenzeitlichen Unlust, recht ordentlich von den Schülern bearbeitet wurde. Allerdings reichte hier die Bestätigung bei einer richtig gelösten, interaktiven Aufgabe nicht aus, so dass viele Schüler einen Betreuer heranriefen, um ein zusätzliches Lob für die richtige Lösung zu bekommen.

Die Schüler wurden mit dem ersten Lernpfad „Brüche erweitern" in dieser ersten Schulstunde nicht ganz fertig. Die meisten waren am Ende jedoch schon dabei die Übungsaufgaben zu lösen, was die am Ende der Stunde eingesammelten Laufzettel bestätigten.

8.1.3 Doppelstunde

Der Probedurchlauf der Lernpfadgruppe wurde in der darauffolgenden Doppelstunde weitergeführt. Viele Schüler versuchten den Lernpfad „Brüche erweitern” abzukürzen, indem sie die Übungsaufgaben, bei denen sie in der letzten Stunde stehengeblieben waren, nicht fortsetzten, sondern einfach mit dem Lernpfad „Brüche kürzen” anfingen. Auf Nachfrage stellte sich heraus, dass die Schüler den Inhalt des Lernpfades nicht als relevant erachteten, worauf die Lehrerin der Klasse erklärte, dass der Inhalt der Lernpfade zum einen in der nächsten Schulaufgabe und zum anderen in einem benoteten Test abgeprüft würde. In diesem Moment ging ein Ruck durch die Klasse und die Arbeitslautstärke reduzierte sich auf ein Flüstern. Damit die Schüler jedoch nicht zu sehr unter Leistungsdruck stünden, wurde gleichzeitig bekannt gegeben, dass ihnen freisteht, die Note des Tests anzunehmen. Sowohl das Arbeitstempo als auch die Konzentration der Schüler wurden durch diese Ansage gesteigert. Nur noch wenige Schüler erweckten den Anschein, dass sie den Lernpfad nicht ernst nahmen. Die meisten arbeiteten jedoch ehrlicher und schienen motivierter als zuvor: Texte und Aufgabenstellungen wurden genauer gelesen, die Reihenfolge der Aufgaben wurde eingehalten und die Ausdauer, Lösungen selber zu erarbeiten, stieg. Diese Tendenz spiegelt sich auch in der Auswertung des Test über die Lernpfadgruppe wieder.

Dieses gesteigerte Arbeitsverhalten konnte jedoch nur zum Teil im zweiten Teil der Doppelstunde beibehalten werden. Immer mehr Schüler suchten den Kontakt zur Lehrkraft, um so eine zusätzliche positive Bestätigung zu bekommen. Zu Beginn des zweiten Teils der Doppelstunde fingen viele Schüler bereits mit dem letzten Lernpfad der Lernpfadgruppe an. Dabei stellte sich heraus, dass einige Probleme damit hatten, ohne die gewohnten Quize und nur mit Hilfe der eigentlichen Lösung, ihre Antworten zu den einzelnen entdeckenden Aufgaben zu kontrollieren. Viele fragten nach, ob ihre Lösungen richtig sei und suchten so eine Rückmeldung durch die Lehrkraft. 20 Minuten vor Ende der Doppelstunde hatten die ersten Schüler die Lernpfadgruppe durchlaufen. Diese wurden angehalten, die anderen bei der Bearbeitung der Aufgaben zu unterstützen. Auf diese Weise konnten die neuen Helfer ihr frisch erlerntes Wissen verfestigen und trugen dazu bei, dass schwächere Schüler bei schwierigeren Aufgaben durch gute Tipps vorankamen. Alle Schüler konnten die Lernpfade innerhalb der drei Schulstunden beenden.

8.2 Laufzettel

Die Laufzettel (siehe Anhang G: S. 193ff.) zu den einzelnen Lernpfaden sind so gestaltet, dass die Schüler zum einen Überlegungen und Ideen zu den selbst entdeckenden Aufgaben notieren können und zum anderen die einzelnen Stationen nach den vorgegebenen Kriterien, als da wären „Die Aufgabe fand ich toll.", „Die Aufgabe fand ich nicht so toll." und „Die Aufgabe fand ich schlecht.", bewerten können.[60] Damit die Schüler dabei einen besseren Überblick behalten können, an welcher Stelle im Lernpfad sie sich gerade befinden, wurde der gesamte Lernpfad stationenweise aufgelistet. Dafür wird die Station genannt und die zugehörigen Überschriften der einzelnen Aufgaben darunter geschrieben. Bei den Aufgaben des Lernpfades, bei denen die Schüler ihre Überlegungen und Ideen notieren sollen, wurden Notizzeilen eingefügt. Es gibt also jetzt Stationen auf den Laufzetteln, die nur Überschriften enthalten um die Schüler an die bearbeiteten Aufgaben zu erinnern, ohne dass sich die Schüler etwas notieren müssen. Andererseits gibt es Stationen, bei denen die Schüler beispielsweise nur bei einer von drei aufgelisteten Überschriften ihre Lösungen aufschreiben sollen, bei den beiden anderen jedoch nicht. Obwohl dabei darauf geachtet wurde, dass sowohl die Namen der Stationen als auch die Namen der Überschriften, den Namen im eigentlichen Lernpfad entsprachen, verwirrte es die Schüler etwas, dass sie nicht zu jeder Überschrift etwas notieren sollten. Beispielsweise wurde das Vorgehen bei der *Pizza-Aufgabe* bei vielen Schülern detailliert beschrieben, obwohl dies erst die nächste Aufgabe im Lernpfad, die das Entdecken der Rechenregeln zum Erweitern beinhaltet, ausdrücklich verlangt. Die Schüler empfanden die Laufzettel teilweise als Last, denn die Sorgfalt, wie ordentlich und gewissenhaft sie die Laufzettel ausfüllten, ließ sukzessiv nach. Einige Schüler bewerteten nur noch die einzelnen Stationen, eigene Aufzeichnungen, die stellenweise im Lernpfad verlangt waren, fehlten jedoch ganz.

[60] Eine ähnliche Bewertungsvariante bietet Barzel et al. (vgl. Barzel et al. 2007: S. 200).

Kapitel 9

Test über die Lernpfade

Der Test (siehe Anhang H: S. 201) fand am 8. Oktober 2008 statt. Um auswerten zu können, welche neuen Inhalte der Lernpfade die Schüler nach der Bearbeitung der Lernpfade erlernt haben, wurden diese vorher nicht vertieft oder wiederholt. Neben dem inhaltlichen Aspekt wird evaluiert, wie die Schüler mit den Lernpfaden zurechtgekommen sind und welche Kritik sie an ihnen üben möchten.

Der inhaltliche Teil des Tests besteht aus drei Aufgabenbereichen, ein Bereich je Lernpfad. Dabei wurde berücksichtigt wie viel die Schüler in den einzelnen Lernpfaden erlernen sollten, dementsprechend wurden mehr oder weniger Fragen gestellt: zu dem Lernpfad „Brüche erweitern" vier Aufgaben, zu dem Lernpfad „Brüche kürzen" drei Aufgaben und zwei zu dem Lernpfad „Brüche vergleichen".

9.1 Meinung der Schüler über die Lernpfade

Im allgemeinen Teil zu den Lernpfaden soll der Schüler zunächst eine Schulnote vergeben, die beschreibt, wie ihm die Arbeit mit den Lernpfaden gefallen hat. Abbildung 9.1 auf der nächsten Seite zeigt einen zugehörigen Überblick, der gleichzeitig die Aussage, wie die Schüler mit den Lernpfaden zurechtgekommen sind, gegenüberstellt. Dabei fällt die Tendenz auf, dass den Schülern zwar das Arbeiten mit den Lernpfaden gefallen hat, dass die Lernpfade jedoch so anspruchsvoll sind, dass diese Arbeit nicht ohne Schwierigkeiten und Anstrengung verbunden war, so dass hier um eine Note schlechter bewertet wurde.

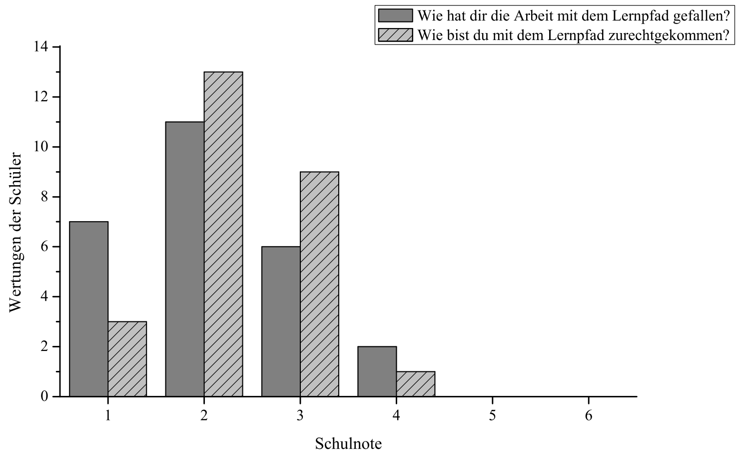


Abbildung 9.1: Auswertung der Meinungsumfrage der Schüler über die Lernpfade.

Bevor die Schüler anschließend Lob und ihre Kritik beschrieben, sollten sie beurteilen, ob sie die Lernpfade weiterempfehlen würden. Abbildung 9.2 auf der nächsten Seite zeigt, wie sich die Schüler entschieden haben. Nur ein Schüler würde den Lernpfad nicht weiterempfehlen und begründet seine Aussage, indem er beschreibt, dass die Lernpfadgruppe zu lang und der Inhalt zu schwer war. Drei Schüler haben „ja" und „nein" gleichzeitig angekreuzt und schildern, dass ihnen einige Aufgaben gut, aber andere Aufgaben nicht so gut gefallen haben.

Viele Schüler schrieben ihre Meinungen zu der Lernpfadgruppe in den dafür angedachten Platz. Besonders wurde gelobt, dass der gewöhnliche Mathematikunterricht durch diese Unterrichtsform abgelöst wurde. Dabei wurde die Arbeit mit dem Computer und besonders mit den Lernpfaden sehr gelobt, da man einerseits knobeln konnte und das Lernen andererseits nicht so langweilig sei, wie im Unterricht. Ein Schüler schrieb, dass er schlecht in Mathe sei, aber durch die andere Art des Unterrichts ermutigt wurde, dieses Mal zu versuchen, mehr zu verstehen. Die *Schokoladen-Aufgabe* und die *Pizza-Aufgabe* wurden von mehreren Schülern als gut hervorgehoben. Auch dass es für die Schüler stets möglich war jemanden um Rat zu fragen und dass sie zu zweit oder zu dritt zusammenarbeiten konnten, wurde häufig betont. Einige Schüler äußerten sich anerkennend über die Übersichtlichkeit und die „witzige" Gestaltung der Lernpfade. Nur sehr wenig Kritik wurde von den Schülern notiert, darunter zählt, dass es „zu viel zu Lesen" gab und dass einige Aufgaben zu schwer gewesen seien.

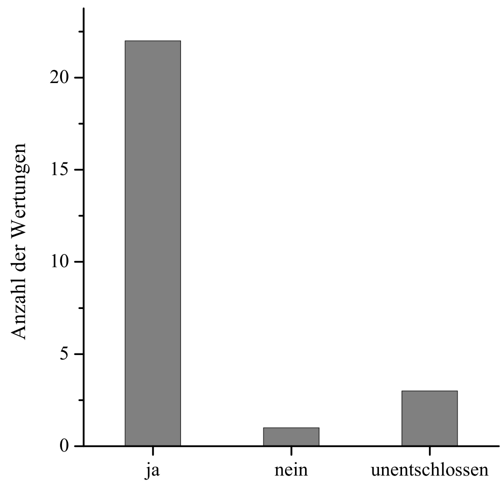


Abbildung 9.2: Würden die Schüler die Lernpfade weiterempfehlen?

Nachdem die Schüler ihre Meinungen im allgemeinen Teil zu den Lernpfaden beantwortet haben, wurde geprüft, was und wie viel die Schüler während ihrer Arbeit an den Lernpfaden erlernt und verstanden haben. Dazu wurden zu jedem einzelnen der drei Lernpfade verschiedene (Transfer-)Aufgaben gestellt.

9.2 Aufgaben Erweitern

9.2.1 Anforderungen

Ausschließlich die *erste* der vier Aufgaben zum Lernpfad „Brüche erweitern" im Test kommt explizit im Lernpfad vor. Hier wird verlangt, den vorgegebenen Bruch $\frac{4}{5}$ mit 6 zu erweitern. Diese Aufgabe bezieht sich auf das zuletzt angegebene Inhaltsziel des Erweiterns (siehe Abschnitt 5.2.1: S. 56).

Die *zweite* Aufgabe verlangt von den Schülern zwei zu $\frac{3}{7}$ äquivalente Brüche anzugeben. Aus zwei Gründen kann diese Aufgabe als Transferaufgabe bezeichnet werden: Erstens ist eine derartige Übung im Lernpfad nur für die Brüche $\frac{11}{22}$ und $\frac{1}{4}$ durch einen Größenvergleich vorhanden. Zweitens können die Schüler diese Aufgabe somit nur richtig lösen, wenn sie das entsprechende Inhaltsziel, nämlich die Erkenntnis der Gleichwertigkeit von erweiterten Brüchen (siehe Abschnitt 5.2.1: S. 56) erreicht und verstanden haben.

Die *dritte* Aufgabe überprüft, ob die Schüler erkannt haben, dass Erweitern

anschaulich gesehen bedeutet, die Unterteilungen eines Bruchteils zu verfeinern. Einige Aufgaben des Lernpfades zeigen diese Tatsache indirekt, beispielsweise die *Pizza-Aufgabe*, die *Schokoladen-Aufgabe* oder das GeoGebra-Applet zur Entdeckung der Rechenregeln des Erweiterns. Explizit sollen die Schüler an einem vorgegebenen Bild das Erweitern mit 4 veranschaulichen, also beispielsweise jedes der gegebenen Bruchteile in vier gleichgroße Unterteilungen unterteilen. In Brunnermeier et al. sind Übungsaufgaben dieser Art direkt nach der Einführung von Erweitern und Kürzen zu finden (vgl. Brunnermeier et al. 2004: S. 23).

Analog zu Schätz / Eisentraut ist die *vierte* und letzte Aufgabe zum Themenbereich Erweitern gestaltet worden (vgl. Schätz / Eisentraut 2004: S. 29). Hier soll der Schüler $\frac{2}{3}$ eines Kreises farbig markieren, der Kreis selbst ist jedoch in 15 gleichgroße Kreissektoren unterteilt. Dabei müssen die Schüler auf die Idee kommen, dass sich der Bruch $\frac{2}{3}$ durch Erweitern auch anders schreiben lässt, so dass das Färben von 15 Sektoren einfacher geschehen kann. Auch hier ist es essentiell die Gleichwertigkeit von erweiterten Brüchen verstanden zu haben.

9.2.2 Auswertung

Die Aufgaben zum Lernpfad „Brüche erweitern" wurden von den Schülern sehr unterschiedlich bearbeitet. Die Abbildung 9.3 auf der nächsten Seite zeigt einen Überblick über die einzelnen Ergebnisse. Besonders diejenigen der zweiten und dritten Aufgabe zeigen, dass die Inhaltsziele nur durch die einfache Bearbeitung des Lernpfades ohne Vertiefung und Wiederholung nicht so umgesetzt werden konnten, so dass Transferleistungen für die Schüler möglich waren. Auch die für die Schüler neue didaktische Methode des entdeckenden Lernens und die Umstände, dass einige Schüler erst während der zweiten Schulstunde der Durchführung eine andere Arbeitseinstellung erlangten, können unter Umständen ein Grund für die vorliegenden Testergebnisse sein.[61]

Einzelne Aufgaben

Obwohl die *erste* Aufgabe analog zu der ersten Übung der letzten Station des Lernpfades „Brüche erwitern" gestellt wurde, konnten nur fünfzehn Schüler die Aufgabe richtig lösen. Erstaunlich ist auch, dass fünf Schüler gar nicht erst

[61] Weitere Ausführungen hierzu siehe Kapitel 10 auf Seite 115.

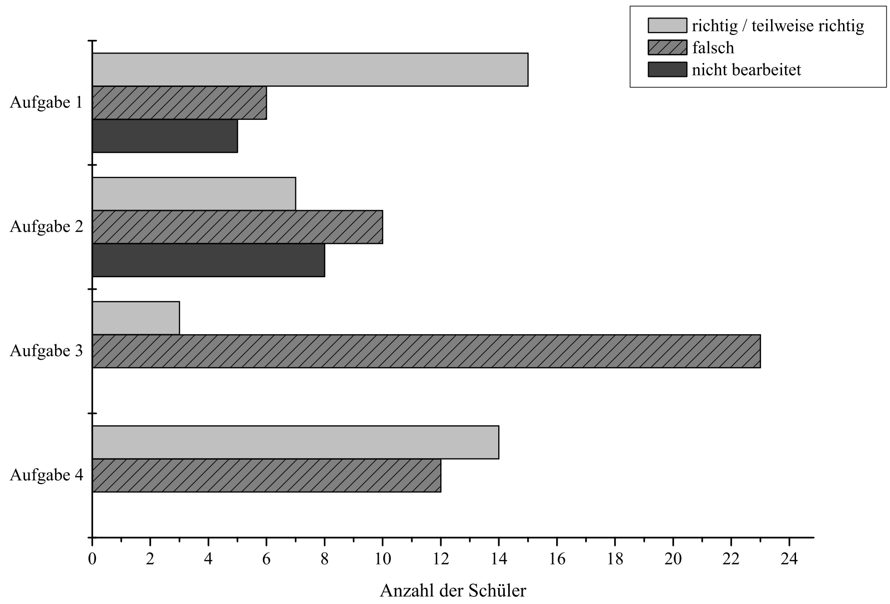


Abbildung 9.3: Auswertung der Aufgaben zum Lernpfad „Brüche erweitern".

versuchten, die Aufgabe zu bearbeiten. Die Fehler, die bei den falsch bearbeiteten Lösungen auftauchten, erinnern an die von Padberg geschilderten (vgl. Padberg 2000: S. 70ff.), können jedoch konkretisiert werden. Dreimal wurden Zähler und Nenner mit 6 erweitert, indem jeweils 6 addiert wurde. Auch wurde einmal nur der Nenner erweitert und mit 6 multipliziert, der Zähler blieb dabei unverändert. Ein Schüler hat die Aufgabenstellung nicht richtig gelesen und mit 2 anstatt mit 6 erweitert.

Die *zweite* Aufgabe wurde nur von achtzehn Schülern überhaupt bearbeitet, davon haben nur fünf Schüler zwei Brüche gefunden, die äquivalent zu $\frac{3}{7}$ sind, zwei Schüler haben je einen passenden Bruch angegeben. Auch hier haben acht Schüler keine Antwort abgegeben. Die falschen Antworten sind sehr variationsreich, am häufigsten wurde falsch erweitert, indem statt mit der gleichen Zahl zu multiplizieren diese Zahl addiert wurde. Am verwunderlichsten war, dass dieser Fehler auch denjenigen Schülern passierte, die in der vorherigen Aufgabe richtig erweitert hatten. Ein Schüler hat sich bei dieser Aufgabe an den Lernpfad erinnert und den dortigen zu untersuchenden Bruch $\frac{11}{22}$ angegeben, ohne näher darüber nachzudenken. Die richtigen Lösungen sind nicht weiter erwähnenswert, doch ein Schüler hat sich seine Lösung verkompliziert, weil er, anstatt zu erweitern, den gegebenen Bruch mit zwei kürzte und so im

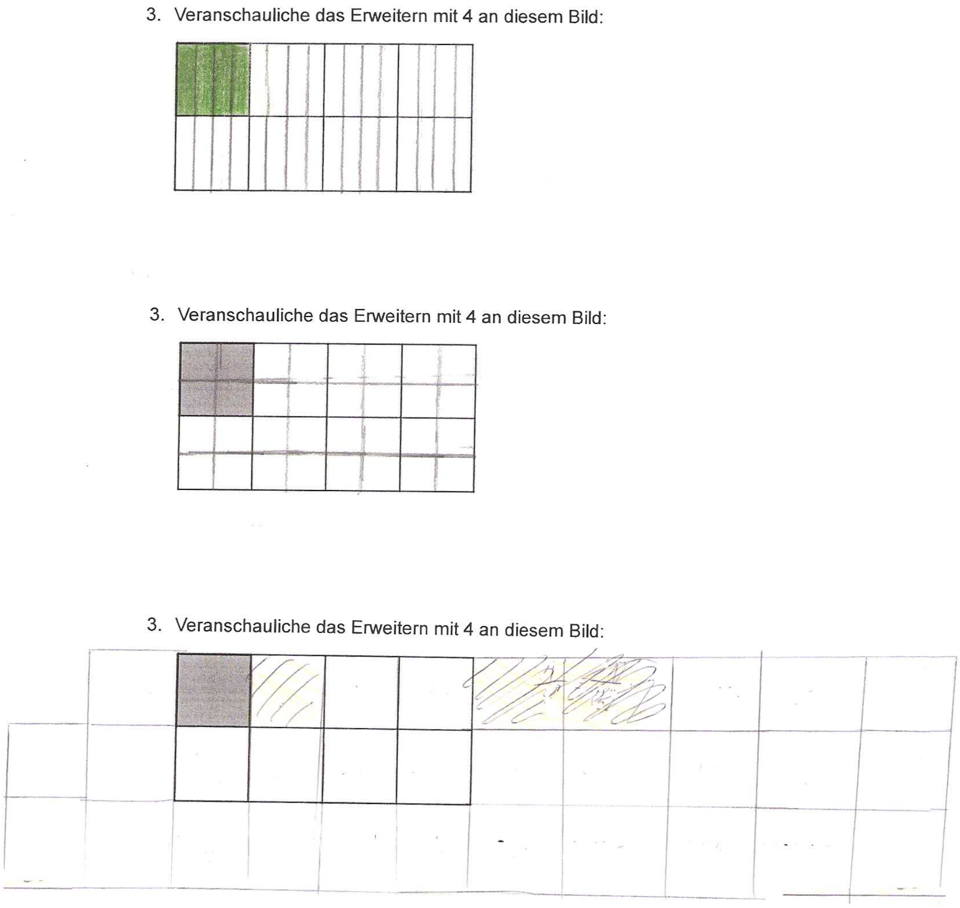


Abbildung 9.4: Auswertung des Tests. Drei Schülerideen zur Lösung der Aufgabe 3.

Zähler und Nenner Dezimalzahlen standen.

Die meisten Schüler kamen mit der *dritten* Aufgabe nicht zurecht. Nur drei Schüler konnten diese lösen, alle anderen bearbeiteten sie falsch. Dabei war stets die gleiche falsche Idee zu erkennen: Es wurden drei oder vier weitere Kästchen ausgemalt. Interessanter an dieser Aufgabe sind jedoch die Einfälle derjenigen Schüler, die die Aufgabe verstanden haben. Besonders die untere in der Abbildung 9.4 dargestellte Lösung eines Schülers ist bemerkenswert, da hier erweitert wurde, indem weitere Kästchen um das Rechteck herum gezeichnet wurden, was sicherlich umständlich, aber nicht falsch ist.

Auch die *vierte* Aufgabe wurde nicht von allen Schülern konventionell gelöst. Vierzehn Schüler gaben die richtige Lösung an, aber man erkannte bei einigen, dass sie den Bruch $\frac{2}{3}$ nicht erweiterten, wie der ursprüngliche Gedanke der Aufgabe war, sondern dass einigen Schülern die bildhafte Vorstellung eines Kreises, der zu zweidrittel gefärbt ist, bekannt war. Mit Hilfe dieses Gedankens

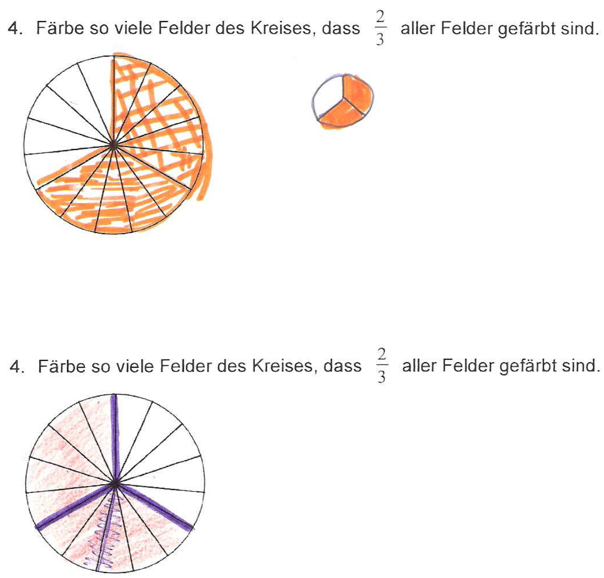


Abbildung 9.5: Auswertung des Tests. Zwei Schülerideen zur Lösung der Aufgabe 4.

brauchten sie nicht zu erweitern und konnten die bereits bekannte Vorstellung anwenden. Die entsprechenden Lösungen sind in der Abbildung 9.5 zu sehen. Die Fehler bei dieser Aufgabe sind meist ähnlich gewesen: Entweder war ein Sektor zu viel oder einer zu wenig ausgemalt. Außerdem verstanden viele Schüler die Forderung, $\frac{2}{3}$ des Kreises zu markieren, falsch, da zweimal drei Sektoren markiert wurden.

9.3 Aufgaben Kürzen

9.3.1 Anforderungen

Die *erste* Aufgabe zum Lernpfad „Brüche kürzen" verlangt einerseits die Fähigkeit, Bruchteile richtig anzugeben, und andererseits das Können, den zugehörigen Bruch vollständig zu kürzen. Diese Aufgabe ist ein Zusammenspiel aus mehreren Aufgaben der Lernpfadgruppe: Die Bestimmung von Bruchteilen konnten die Schüler in der Wiederholung des Lernpfades „Brüche erweitern" üben. Die Aufgaben zum vollständigen Kürzen sind jedoch im Lernpfad einfacher als im Test, da dort eine Funktion eingebaut ist, die den Schülern mitteilt, dass sie zwar richtig, aber nicht vollständig gekürzt haben. Hier im Test gibt es diesen Hinweis nicht.

Bei der *zweiten* Aufgabe „Kürzt du $\frac{\square}{78}$ mit 6, dann erhältst du $\frac{2}{\square}$" werden

die Inhaltsziele der Rechenregeln zum Erweitern und zum Kürzen vereint. Um die Lücke links im Zähler zu füllen, muss erweitert werden, um die Lücke rechts im Nenner zu füllen, muss gekürzt werden. Eine derartige gekoppelte Aufgabe findet sich nicht im Lernpfad und die Tatsache, dass diese unter dem Bereich Lernpfad „Brüche kürzen" aufgeführt wird, verlangt, dass die Schüler den Zusammenhang zwischen Erweitern und Kürzen umsetzen können sollten, um diese Aufgabe richtig lösen zu können.

Analog zu Wagner wurde die *dritte* Aufgabe erstellt (vgl. Wagner 2005: S. 14). Hier sollen die Schüler eine Gleichungskette so verbessern, dass sie stimmt. Im Lernpfad gibt es in einem Quiz eine ähnliche Aufgabe, in der die Schüler entscheiden müssen, ob eine gegebene Gleichung richtig oder falsch ist, jedoch sind dort nur zwei Brüche gegenübergestellt im Gegensatz zum Test, in dem drei Brüche zu vergleichen sind. Dabei müssen die Schüler in der Lage sein Rechenschritte nachzuvollziehen und sie anzuwenden.

9.3.2 Auswertung

Die Aufgaben zum Lernpfad „Brüche kürzen" wurden von den Schülern weitaus besser als die vorherigen bearbeitet. Die Abbildung 9.6 auf der nächsten Seite zeigt einen Überblick über die einzelnen Aufgaben. Besonders die Ergebnisse der zweiten und dritten Aufgabe[62] zeigen, dass die Inhaltsziele größtenteils erreicht wurden. Entweder waren die Aufgaben leichter als die des Lernpfades „Brüche erweitern" oder das Thema „Brüche kürzen" konnte von den Schülern besser umgesetzt werden. Auch kann die Ankündigung, dass im Anschluss ein benoteter Test geschrieben würde, unter Umständen ein Grund für die besseren Testergebnisse sein.[63]

Einzelne Aufgaben

Die *erste* Aufgabe wurde ordentlich bearbeitet. Sieben Schüler haben den richtigen Bruch bestimmt und ihn richtig vollständig gekürzt. Elf Schüler haben zumindest den richtigen Bruch angegeben, wobei einige versucht haben zu kürzen, dies jedoch nicht vollständig taten. Dabei war besonders eine Lösung

[62] Hierbei ist ausschlaggebend, dass zunächst auch die erste Aufgabe positiv hervorzuheben ist. Allerdings fällt diese bei näherem Betrachten hinter den beiden anderen zurück, denn hier haben nur sieben Schüler die Aufgabe komplett richtig gelöst. Elf Schüler konnten nur eine der Lücken richtig ausfüllen.

[63] Weitere Ausführungen hierzu siehe Kapitel 10 auf Seite 115.

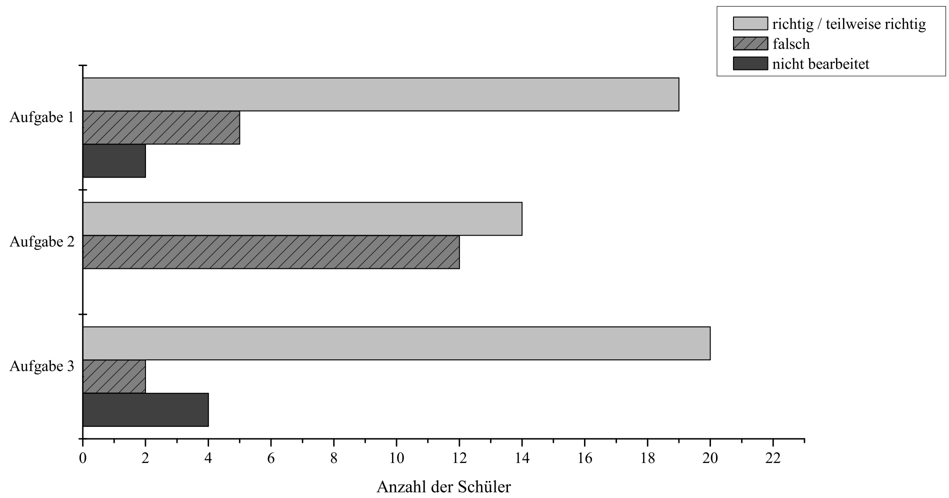


Abbildung 9.6: Auswertung der Aufgaben zum Lernpfad „Brüche kürzen".

Abbildung 9.7: Auswertung des Tests. Eine Schüleridee zur Lösung der Aufgabe 1.

recht einfallsreich (siehe Abbildung 9.7: S. 111), in der anstatt zu kürzen je zwei kleine Rechtecke „verbunden" wurden. Auf diese Weise kam zwar nicht die richtige vollständig gekürzte Lösung heraus, der Ansatz jedoch ist sehenswert. Die weiteren Fehler können in zwei Gruppen aufgeteilt werden: Einige Schüler haben die Anzahl der Kästchen falsch gezählt, so dass beispielsweise Brüche wie $\frac{6}{23}$ als Ergebnis zu lesen waren. Wieder andere haben vergessen, den markierten Bruchteil mitzuzählen, wodurch im Nenner 18 statt 24 stand.

Bei der Korrektur fiel auf, dass die *zweite* Aufgabe recht gut von den Schülern bearbeitet wurde. Dreizehn Schüler haben beide Lücken richtig ausgefüllt und fünf Schüler eine der beiden. Die Schüler, die nur in einer Lücke eine richtige Lösung eingetragen haben, lösten meist den zu erweiternden Teil der Aufgabe falsch. Die wenigen komplett falschen Lösungen sind auf die Anwendung eines falschen Algorithmus zurückzuführen, da hier mit 6 erweitert wurde, indem im Zähler und Nenner mit 6 addiert oder subtrahiert wurde.

Am besten im gesamten Test fiel die *dritte* Aufgabe aus. Fünfzehn rich-

tige und sechs teilweise richtige Lösungen lassen vermuten, dass die Schüler mit diesem Aufgabentyp und mit dem vorausgesetzten Inhaltsziel am meisten anfangen konnten. Nur zwei Schüler haben diese Aufgabe falsch gelöst, vier haben es nicht versucht. Die Schüler, die nur einen Bruch richtig verbessert haben, korrigierten meistens den rechten Bruch falsch oder gar nicht, daher ist es möglich, dass einige Schüler den verstecken Hinweis der Aufgabenstellung überlesen haben, dass es sich um „die Fehler", also mehrere Fehler handelt. Die komplett falschen Lösungen basieren auf dem falschen Verständnis der Rechenregeln zum Erweitern bzw. Kürzen. Hier haben die beiden Schüler die gleiche Zahl zum Zähler und Nenner addiert.

9.4 Aufgaben Größenvergleich

9.4.1 Anforderungen

Die *erste* Aufgabe verlangt von den Schülern ein hohes Maß an Verständnis. Gleich zwei Inhaltsziele müssen erreicht worden sein: Die Schüler müssen die im Lernpfad ausgewiesene „dritte Regel zum Größenvergleich", das Erweitern auf den Hauptnenner, kennen, was gleichzeitig impliziert, dass sie richtig erweitern können. Doch zusätzlich muss das, durch die bloße Anwendung der Lernpfade nicht abgedeckte Prozessziel angewandt werden: die Schüler sollen begründen können, warum ein Bruch größer oder kleiner ist als ein anderer. Schon bevor der Test geschrieben wurde war von großem Interesse, wie gut die Schüler wohl diese Aufgabe bearbeiten würden.

Der Aufgabentyp der *zweiten* Aufgabe ist für die Schüler ebenfalls neu. Zwar gibt es im Lernpfad Aufgaben, die ein ähnliches Verständnis voraussetzen, die sich aber dennoch in einigen Punkten unterscheiden. Hier gibt es zwei Ungleichungsketten mit je drei Brüchen. Bei der linken Kette muss der Zähler des mittleren Bruches ausgefüllt werden, bei der rechten der Zähler des mittleren Bruches und der Nenner des rechten Bruches. Während sich die erste Ungleichungskette noch durch die anschauliche Vorstellung von unterschiedlich vielen Bruchteilen oder Bruchstücken lösen lässt, erfordert die zweite die Fähigkeit, beliebige Brüche miteinander vergleichen zu können. Hierbei gibt es allerdings keine eindeutige Lösung.

9.4.2 Auswertung

Nach der Korrektur der ersten Aufgabe musste als Konsequenz erfolgen, da kein Schüler diese Aufgabe lösen konnte, diese nicht zu bewerten. Die Abbildung 9.8 zeigt demnach nur die Auswertung der zweiten Aufgabe.

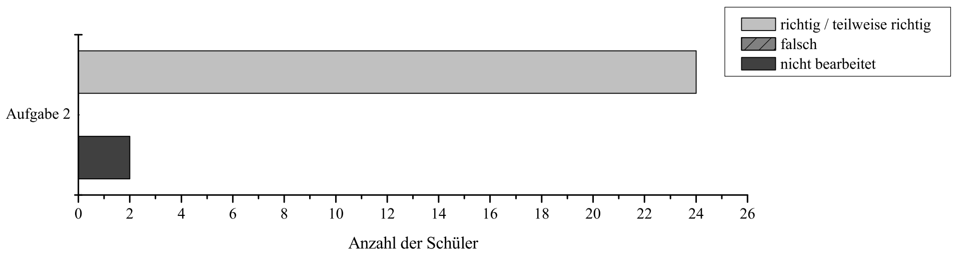


Abbildung 9.8: Auswertung der Aufgaben zum Lernpfad „Brüche vergleichen".

Einzelne Aufgaben

Kein Schüler konnte die *erste* Aufgabe beantworten, wobei fünfzehn Schüler die Frage erst gar nicht versuchten zu beantworten. Nur bei einer Schülerantwort ließ sich ansatzweise eine richtige Lösungsmöglichkeit erkennen, denn hier wurde mit der unterschiedlichen Größe der einzelnen Bruchteile argumentiert. Eine falsche, aber verbreitete Meinung war auch, dass immer der Bruch der größere ist, der den kleineren Nenner hat.

Die *zweite* Aufgabe wurde von sieben Schülern richtig und von siebzehn Schülern teilweise richtig bearbeitet. Es fällt auf, dass kein Schüler alle Lücken falsch ausgefüllt hat, die rechte Ungleichungskette stets richtig ausgefüllt wurde.

9.5 Punkteverteilung und Ergebnisse

Nach der Auswertung der Ergebnisse der Schüler wurde die folgende Punkteverteilung vorgenommen, die der Tabelle 9.1 auf der nächsten Seite zu entnehmen ist. Aufgrund der Tatsache, dass kein Schüler die erste Aufgabe zum Lernpfad „Brüche vergleichen" beantworten konnte, wurde diese Aufgabe aus der Bewertung herausgenommen.

Da der Lerninhalt der Lernpfade vor dem Test nicht mit den Schülern besprochen, wiederholt oder vertieft wurde und die Aufgaben im Test selbst meist

Aufgaben Lernpfad „Brüche erweitern“			
1. Aufgabe	2. Aufgabe	3. Aufgabe	4. Aufgabe
1 Punkt	2 Punkte	1 Punkt	2 Punkte

Aufgaben Lernpfad „Brüche kürzen“		
1. Aufgabe	2. Aufgabe	3. Aufgabe
2 Punkte	2 Punkte	2 Punkte

Aufgaben Lernpfad „Brüche vergleichen“	
1. Aufgabe	2. Aufgabe
nicht bewertet	3 Punkte

Tabelle 9.1: Punkteverteilung des Tests.

Transferleistungen von den Schülern verlangten, wurde ein großzügiger Punkteschlüssel gewählt. Der Abbildung 9.9 kann die Verteilung der Rohpunkte entnommen werden. Weiterhin gibt sie indirekt Auskunft über den Notendurchschnitt von $3,4$ und über den Punkteschlüssel.

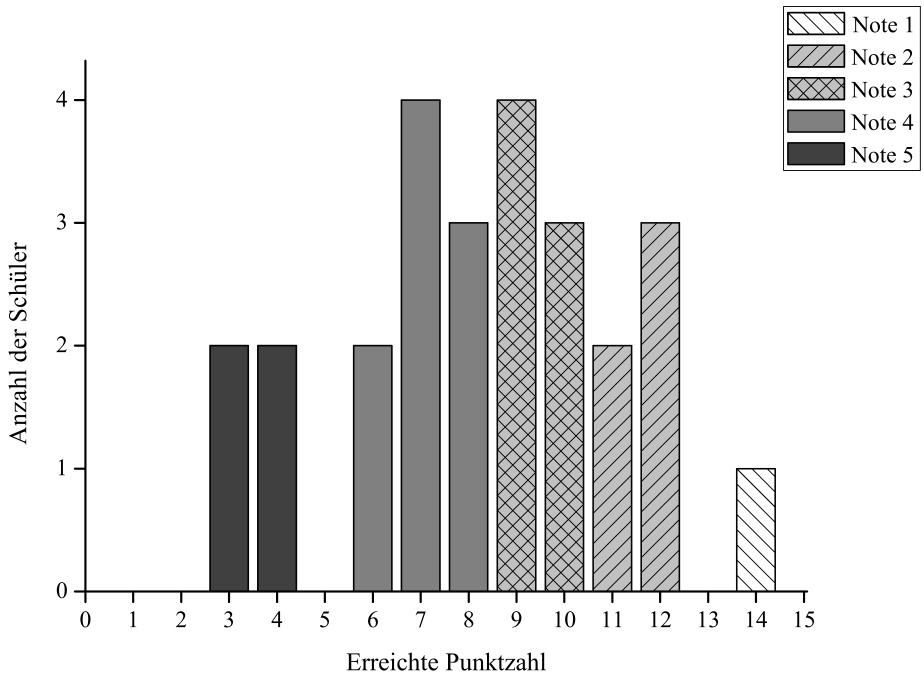


Abbildung 9.9: Verteilung der Rohpunkte.

Kapitel 10

Konsequenzen und Ausblick

Nachdem der Probedurchlauf in der Schule erfolgreich abgeschlossen und der Test ausgewertet ist, stellen sich einige Fragen[64]. Allen voran, warum der Test nicht so gut, wie erwartet, ausgefallen ist.

Als ein Grund könnte die Methodik des entdeckenden Lernens sein, auf die die Schüler nicht vorbereitet waren und die nur selten im Unterricht, speziell im Mathematikunterricht, angewandt wird. Während der Durchführung fiel besonders die Uneigenständigkeit der Schüler auf, da einerseits stets positiver Zuspruch gesucht wurde, wenn eine Aufgabe richtig gelöst wurde und andererseits einige Schüler die fehlende Kontrolle, in Versuchung führte, etwas schwierigere oder langweiligere Aufgaben einfach wegzulassen. Auch für die Schüler „unwichtige" Textstellen und Arbeitsaufträge wurden überlesen, so dass ein von-Link-zu-Link-Springen zumindest während der Bearbeitung des Lernpfades „Brüche erweitern" einige Male beobachtet werden konnte. Des Weiteren lässt das Testergebnis zum Lernpfad „Brüche erweitern" darauf schließen, dass sich viele Schüler ohne großes Nachdenken und Überlegen „durchgeklickt" haben. Allein die erste Aufgabe des Tests, die kein Transferwissen voraussetzt, zeigt, dass viele Schüler diesen Lernpfad nicht mit voller Konzentration und vollem Ehrgeiz bearbeitet haben. Als in der zweiten Schulstunde bekannt wurde, dass ein Test stattfinden würde, merkte man allein schon an der Arbeitsatmosphäre, dass sich die Schüler mehr anstrengten; auch die Auswertung des Tests unterstreicht diese Vermutung. An dieser Stelle kann man sofort weitergehen und fragen, ob drei Schulstunden tatsächlich ausreichen würden, wenn

[64] Diese Fragen sind nach subjektivem Empfinden aufgeführt und beantwortet worden. Dabei können die dargebotenen Annahmen nicht auf Richtigkeit geprüft werden, wenngleich sie nicht unbegründet skizziert werden.

die Schüler wirklich alle Aufgaben der Lernpfade selbstständig lösen und dabei nicht nur spielerisch klicken und vage Thesen aufstellen würden.

Ein weiterer Grund für das Ergebnis des Tests könnte sein, dass es für die Schüler einfach zu viel neue Informationen in so kurzer Zeit waren. Dazu gibt es mehrere Möglichkeiten, die dabei hilfreich sind, die Fülle an Informationen für die Schüler zu strukturieren: Beispielsweise eine Wiederholung der Lernpfad-Inhalte vor dem Test oder eine Kontrolle und Korrektur der Laufzettel nach jeder einzelnen Unterrichtsstunde. Dadurch können Missverständnisse und Wissenslücken, die durch eine uneigenständige und teilweise unsaubere Arbeitsweise der Schüler entstanden sind, verbessert beziehungsweise behoben werden.

Nach den eben aufgeführten Thesen bleibt die Frage nach den Konsequenzen, die nach der Auswertung des Tests für die Anwendung der Lernpfadgruppe zu ziehen sind, offen. Wie Zocher schon erfasst hat (Zocher 2000: S. 352), lässt sich auch aus den Erfahrungen des Probedurchlaufes der Lernpfadgruppe schlussfolgern, dass entdeckendes Lernen geübt werden muss und sich nicht so einfach vermitteln lässt. Dass einige Schüler die selbsterlernten Inhalte sicherlich verstanden haben, aber die meisten nicht in der Lage waren, Transferleistungen zu bringen, kann mit dem Anwenden der neuen Methodik des entdeckenden Lernens zusammenhängen.

Um auch in Zukunft mit den Lernpfaden arbeiten zu können, kann das zum einen bereits beschriebene berücksichtigt werden. Zum anderen könnten die Lernpfade auch teilweise umgestaltet und verbessert werden. Eine Idee hierzu wäre die Interaktivität der Lernpfade etwas zu reduzieren, indem schriftliche Übungen eingefügt würden, die die Schüler in ihren Heften bearbeiten sollten. Da die Hefte eingesammelt und korrigiert werden können, gibt es auf diese Weise eine Überprüfungsmöglichkeit, ob sich die Schüler mit dieser Aufgabe befasst haben und ob sie mit ihr zurecht gekommen sind.

Weiterhin könnten zusätzliche Kontrollfunktionen eingebaut werden. Hierbei könnte beispielsweise bei einer richtig bearbeiteten Aufgabe ein Lösungsbuchstabe erscheinen. Hat man alle Aufgaben erfolgreich bearbeitet, dann erhält man anhand der Lösungsbuchstaben einen Lösungssatz. Auf der gleichen Idee basierend könnten die einzelnen Aufgaben im Lernpfad zu Beginn gesperrt sein. Diese würden nur nach und nach freigegeben werden, immer dann, sobald eine Aufgabe richtig bearbeitet wurde. Diese Methode hat jedoch gleichzeitig zwei Schwierigkeiten. Zum einen entspricht eine stärkere Kontrolle nicht dem

entdeckenden Lernen (siehe Abschnitt 3.2.2: S. 29). Zum anderen ist es nur möglich die externen Aufgaben durch ein Passwort oder ähnliches zu sperren. Die zum Entdecken der Rechenregeln wichtigen Aufgaben im Wiki müssten hierbei jedoch außenvor gelassen werden, da diese Funktionen nicht vom Wiki unterstützt werden.

Dass die programmierte Abfrage[65] der *Schokoladen-Aufgabe* und der *Pizza-Aufgabe* sowie die der Aufgaben *Naschen macht Spaß* und *Zimmer aufräumen* durch einen geschickteren Algorithmus, der beispielsweise testet, wo der Mittelpunkt des Bildes liegt, für eine leichtere Bedienbarkeit und weniger „Falsch"-Meldungen gesorgt hätte, wurde bereits erwähnt (siehe Abschnitt 7.3: S. 92).

Zuletzt kann festgestellt werden, dass, obwohl Test im ersten Moment nicht so gut ausgefallen zu sein scheint, ein Notendurchschnitt von $3,4$ unter den gegebenen Bedingungen kein schlechter ist. Zum einen wurden nicht gerade die besten Bedingungen für den Durchlauf der Lernpfadgruppe erfüllt (siehe Abschnitt 8.1.1: S. 97). Zum anderen fand, ungeachtet der Tatsache, dass die Schüler ein völlig neues Thema mit einer völlig neuen Methodik erarbeiten mussten, weder eine Wiederholung, noch eine Fragestunde oder gar eine Vertiefung statt. Dies lässt die Schlussfolgerung zu, dass der Test auf den zweiten Blick kein schlechter sondern ein recht ordentlicher ist.

Ein erneutes Anwenden der Lernpfadgruppe ist somit durchaus wünschenswert und wäre sicherlich eine neue positive Erfahrung für die Schüler im modernen Mathematikunterricht.

[65]Diese Abfrage prüft die Lage aller Ecken der Polygone um die betreffenden Bilder. Falls eine der Ecken nicht in der zugehörigen Schachtel oder Schublade liegt, wird die Aufgabe als „falsch" bewertet.

Anhang

Anmerkung

Die nachfolgenden Abbildungen der selbsterstellten Lernpfade und der zugehörigen externen Dateien wurden mit Hilfe der Druckfunktion eines Browsers erstellt und in die vorliegende Arbeit eingefügt. Auf diese Weise kann zwar eine gute Qualität der Bilder, der Texte sowie der Applets gewährleistet werden, allerdings konnte kein Einfluss auf die Seiteneinteilung genommen werden: Damit hohe Seitenelemente, wie Applets oder Bilder, nicht abgeschnitten werden, wurden sie vom Browser bei einem Seitenwechel verschoben und hinterließen an ihrer eigentlichen Position einen, teilweise recht großen, freien Raum. Außerdem ist auch das Erscheinungsbild der Abbildungen leicht verändert, weil das Wiki für ausgedruckte Seiten ein anderes Design angibt als für deren Darstellung am Bildschirm.

Aus Gründen der Vollständigkeit wurden die Abbildungen in diese Arbeit eingefügt. Für eine Betrachtung der ursprünglichen Einstellungen sollten jedoch die Archiv-Version (CD-ROM) sowie das Wiki selbst herangezogen werden.

Anhang A

Lernpfad „Brüche erweitern”

Mathematik-digital/Erweitern von Brüchen

aus ZUM-Wiki, dem Wiki für Lehr- und Lerninhalte auf ZUM.de

< Mathematik-digital

Lernpfad

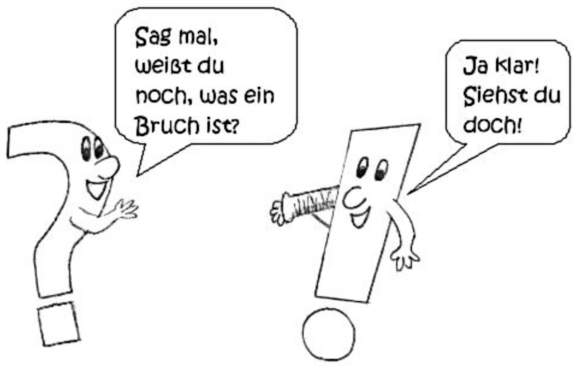
Brüche erweitern

Teil 1 der Lernpfadgruppe: Brüche erweitern, kürzen und vergleichen.

- **Zeitbedarf: in der Probephase**
- **Material: Laufzettel**

Kurzinfo:

Diese Seite gehört zu **mathematik-digital**.
zur Linkdatenbank



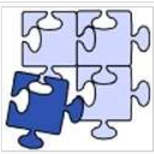
Weißt du denn, was ein Bruch ist?

Auf geht's, eine kleine Wiederholung kann niemandem schaden!

Station Wiederholung

Bearbeite alle drei Wiederholungsübungen von links nach rechts.

1. Was gehört alles zu einem Bruch?



[Rechtsklick:] Starte Puzzle

2. Welcher Bruchteil ist blau gefärbt?

[Rechtsklick:] Starte Quiz

3. Male die Bruchteile an!

[Rechtsklick:] Teste dich!

Station Einführung Erweitern

Suchbild

Starte das Suchbild und schreibe dir alle vier Unterschiede, die es gibt, auf deinen Laufzettel.

[Rechtsklick:] Starte das Suchbild

Station Zusammenhang zwischen bestimmten Brüchen

Also wirklich, über den Unterschied $\frac{1}{2}$ und $\frac{11}{22}$ scheint sich auch Frau Fragezeichen zu wundern...

Lasst uns der Vermutung auf die Spur gehen!

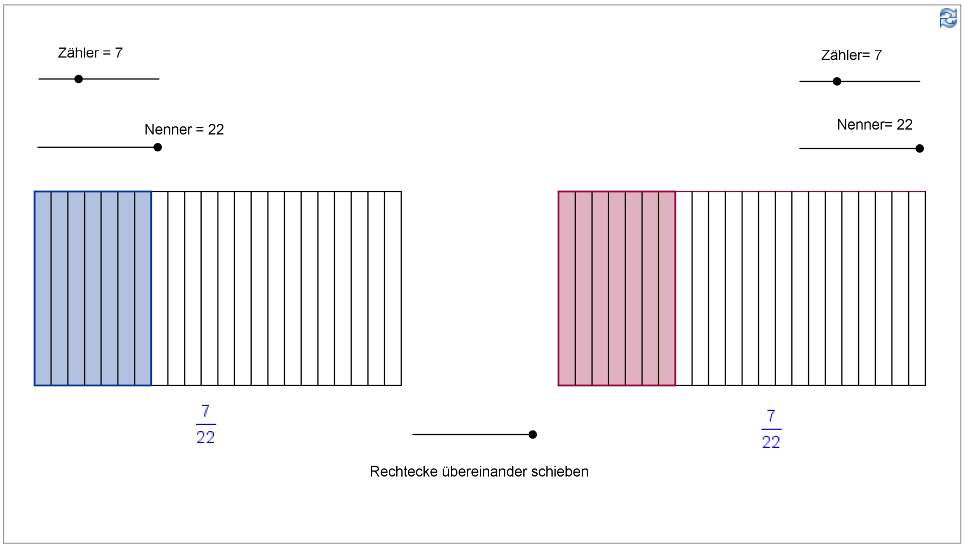
Hier hast du zwei Rechtecke, die sich übereinander schieben lassen.

Du kannst beide Rechtecke so einstellen, dass ein bestimmter Bruchteil angezeigt wird.

Verstelle zuerst den Nenner und dann den Zähler.

1. **Finde mit Hilfe der Rechtecke heraus, was $\frac{1}{2}$ und $\frac{11}{22}$ gemeinsam haben und schreibe es dir auf deinen Laufzettel.**
2. **Stelle links den Bruch $\frac{1}{4}$ ein und versuche rechts einen weiteren Bruch einzustellen,**

   der den gleichen Bruchteil wie $\frac{1}{4}$ anzeigt. Schreibe dir auch diese Brüche auf deinen Laufzettel.



Jetzt hast du bestimmt noch einen Bruch gefunden, der den gleichen Bruchteil wie $\frac{1}{4}$ anzeigt, aber es gibt noch ganz viele andere!

Anscheinend sehen einige Brüche unterschiedlich aus, doch man kann den gleichen Bruchteil durch verschiedene Brüche angeben.

Deshalb ist $\frac{1}{2} = \frac{11}{22}$, weil sie den gleichen Bruchteil angeben.

Station Erweitern

Pizza essen gehen

Frau Fragezeichen bestellt eine Spinatpizza, Herr Ausrufezeichen eine Thunfischpizza und du eine Salamipizza.

Jeder schneidet seine Pizza zunächst in unterschiedlich viele, aber gleich große Stücke.

Jetzt habt ihr euch überlegt, dass ihr die Pizzen unter euch aufteilen wollt.

Herr Ausrufezeichen schlägt vor, die drei Pizzen gerecht aufzuteilen, sodass jeder den gleichen Anteil von jeder Pizza bekommt.

[Rechtsklick:] Wie das nur funktionieren soll?

Was du gerade in der Pizza-Aufgabe gemacht hast, nennt sich **Erweitern**.

Beim Erweitern eines Bruches verfeinerst du die gezeigten Bruchteile, indem du sie weiter unterteilst.

Die Rechnung, die dahinter steckt

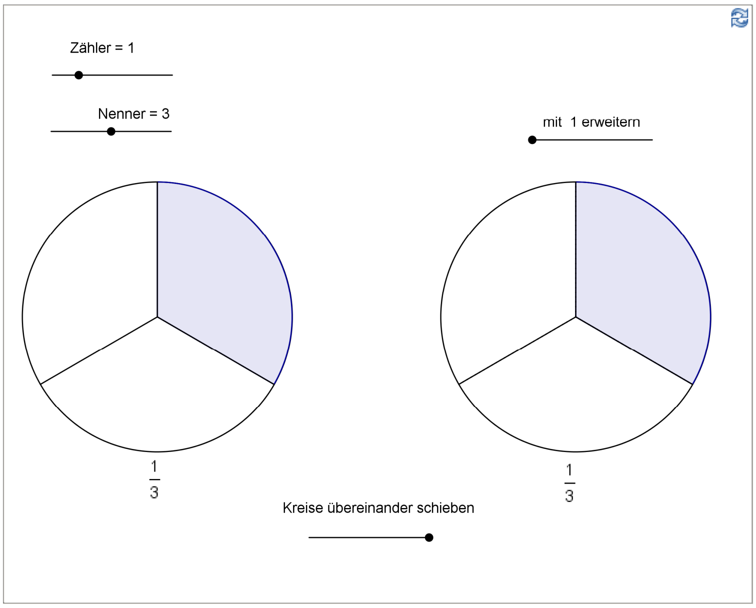
Hier hast du zwei Kreise. Bei dem linken Kreis kannst du einen Bruch einstellen, der sich automatisch auch beim rechten Kreis einstellt.

Verschiebe wieder zuerst den Nenner und dann den Zähler.

Die Bruchteile des Kreises auf der rechten Seite lassen sich erweitern.

Bearbeite nun folgende Aufgaben und schreibe alles auf deinen Laufzettel, deine Antworten wirst du für ein Quiz noch brauchen.

1. Stelle den Bruch $\frac{1}{4}$ ein und erweitere mit **4**.
   - Wie verändert sich dabei der rechte Kreis?
   - Wie verändern sich die Brüche unter den Kreisen?
2. Stelle nun einen Bruch ein und erweitere ihn so, dass der Zähler und der Nenner rechts dreimal so groß sind wie links.
   - Mit welcher Zahl musst du erweitern?
3. Stelle den Bruch $\frac{1}{2}$ ein. Erweitere mit **5**.
   - Vergleiche auf beiden Seiten die Zähler und die Nenner. Wie haben sie sich beim Erweitern mit **5** verändert?



Quiz: Hast du alle Fragen richtig beantwortet?

Hast du auch versucht alle Fragen zu beantworten?

[Rechtsklick:] Teste dich und überprüfe deine Antworten.

Schreibe dir den Merksatz in dein Heft:

Ein Bruch wird erweitert, indem man den Zähler und den Nenner mit der selben Zahl multipliziert.

Beispiel: $\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{5}{15}$

Station Besonderheiten beim Erweitern

Warum sich der Wert beim Erweitern nicht ändert -
Schokolade oder keine Schokolade, das ist hier die Frage

Frau Fragezeichen hat immer ganz viele Fragen, die sie alleine nicht beantworten kann.

Deshalb kommen regelmäßig Stefan, Marie und Tobi und helfen Frau Fragezeichen dabei.

Jeder bekommt dann immer eine leckere Tafel Schokolade.

Auch heute ist es wieder so weit, doch diesmal haben Stefan, Marie und Tobi noch einige Freunde mitgebracht:

Nele, Johannes, Benni, Sabine, Moni und dich.

Frau Fragezeichen freut sich riesig über so viel Besuch, doch sie hat nur drei Tafeln Schokolade.

Da fällt ihr auch schon die erste Frage ein...

[Rechtsklick:] Hilf mit, dann ist die erste Frage schon geschafft.

Egal mit welcher Zahl du die Schokoladenstücke erweitert hast, du und deine Freunde, ihr habt zum Schluss immer gleich viel Schokolade bekommen.

Mit welchen Zahlen darfst du erweitern?

Was ist wohl N N N ? Finde es heraus!

[Lösung ausblenden]

Wenn du einen Bruch, z.B. $\frac{1}{6}$ mit **0** erweitern willst, dann musst du den Zähler und den Nenner mit **0** multiplizieren. Für den Zähler ist das auch nicht schlimm, aber für den Nenner! Denn der Nenner darf niemals Null sein!!!

Warum?

$\frac{1}{6}$ ist nichts anderes als 1:6.
Und wenn du jetzt im Nenner **0** hättest, dann würdest du durch **0** teilen und das soll man nicht!

N N N heißt nicht anderes als der Nenner darf Niemals Null sein!

Schreibe dir den Merksatz in dein Heft:

Du kannst Brüche immer Erweitern, ohne dass sich der Wert ändert.

Der Nenner darf Niemals Null sein!

Station Übungen zum Erweitern

Bearbeite von links nach rechts alle vier Übungen.

Gibt es mehrere Aufgaben oder Schwierigkeiten zur Auswahl, dann musst du nur **eine** der Aufgaben bearbeiten.

Die Farben können dir bei deiner Entscheidung helfen:

leicht mittelschwer schwer

1. Übung	2. Übung	3. Übung	4. Übung
Berechne die erweiterte Zahl	**Mit welcher Zahl wurde erweitert?** oder **Erweitere auf den gleichen Wert**	**Quiz: Richtig oder falsch?** oder **Quiz: Welcher Bruch wurde erweitert?**	**Erweitere auf den gleichen Nenner**
[Rechtsklick:] leicht	[Rechtsklick:] Mit welcher Zahl wurde erweitert?		
[Rechtsklick:] mittelschwer	[Rechtsklick:] Erweitere auf den gleichen Wert (mittelschwer)	[Rechtsklick:] Quiz: Richtig oder falsch?	[Rechtsklick:] Los geht's
[Rechtsklick:] schwer	[Rechtsklick:] Erweitere auf den gleichen Wert (schwer)	[Rechtsklick:] Quiz: Welcher Bruch wurde erweitert?	

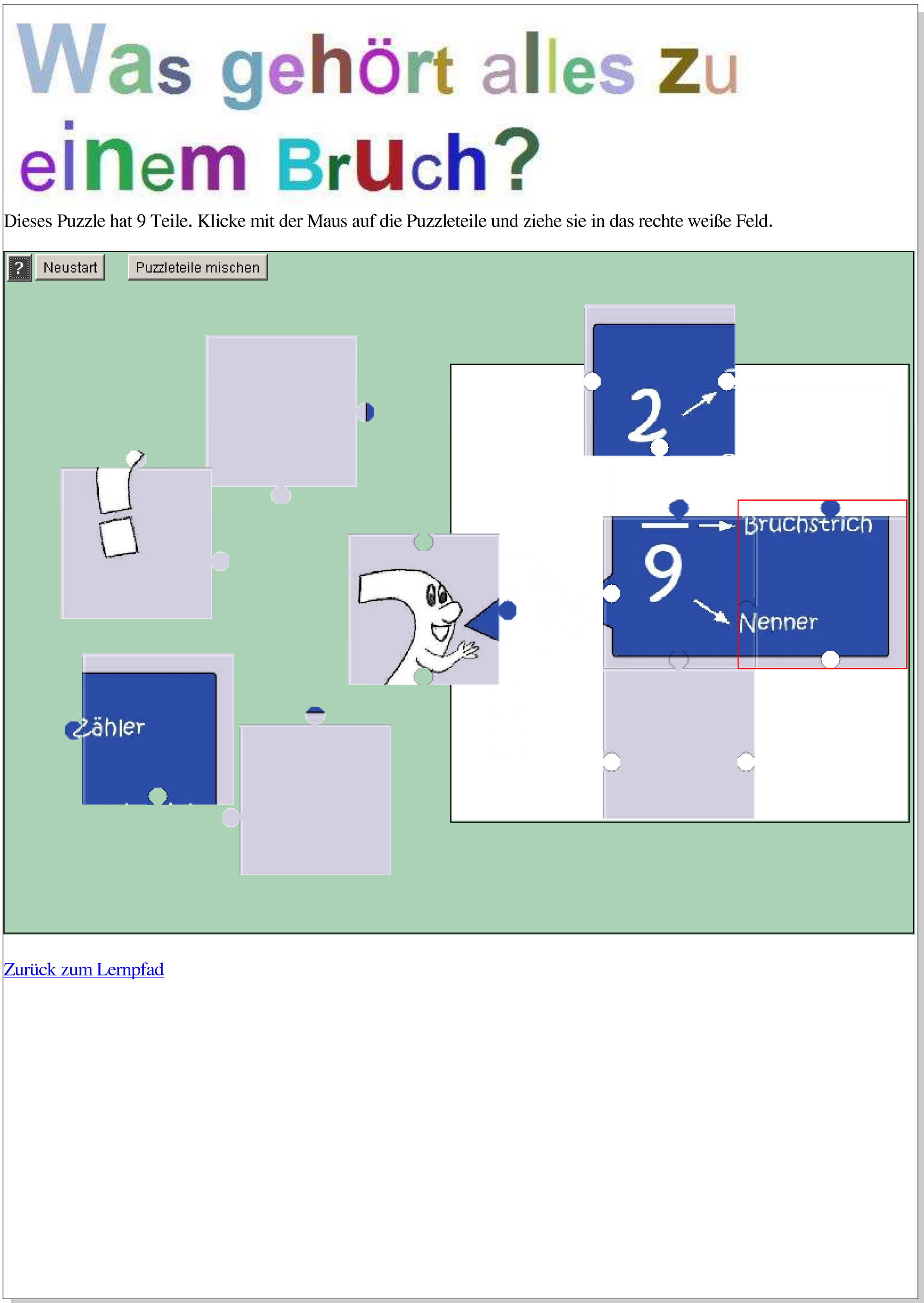
weiter zum Lernpfad Brüche kürzen

Von „http://wiki.zum.de/Mathematik-digital/Erweitern_von_Br%C3%BCchen"
Kategorien: Mathematik-digital | Bruchrechnung

Anhang B

Externe Aufgaben zu „Brüche erweitern”

B.1 Puzzle „Was gehört alles zu einem Bruch?”



B.2 Quiz „Welcher Bruchteil ist gefärbt?"

Welcher Bruchteil ist gefärbt?

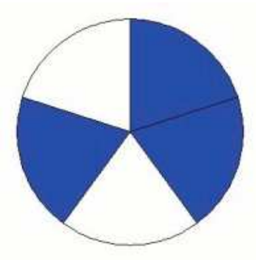
Weißt du, welcher Bruchteil auf den Bildern blau gefärbt ist?

Klicke auf die Kästchen ? und sie sagen dir, ob deine Antwort richtig oder falsch ist.

Beantwortest du eine Frage falsch, musst du sie erst richtig beantworten, bevor sie gewertet wird.

Wenn du alle Fragen richtig beantwortet hast, ist die Übung geschafft.

1 / 6 Nächste Frage =>



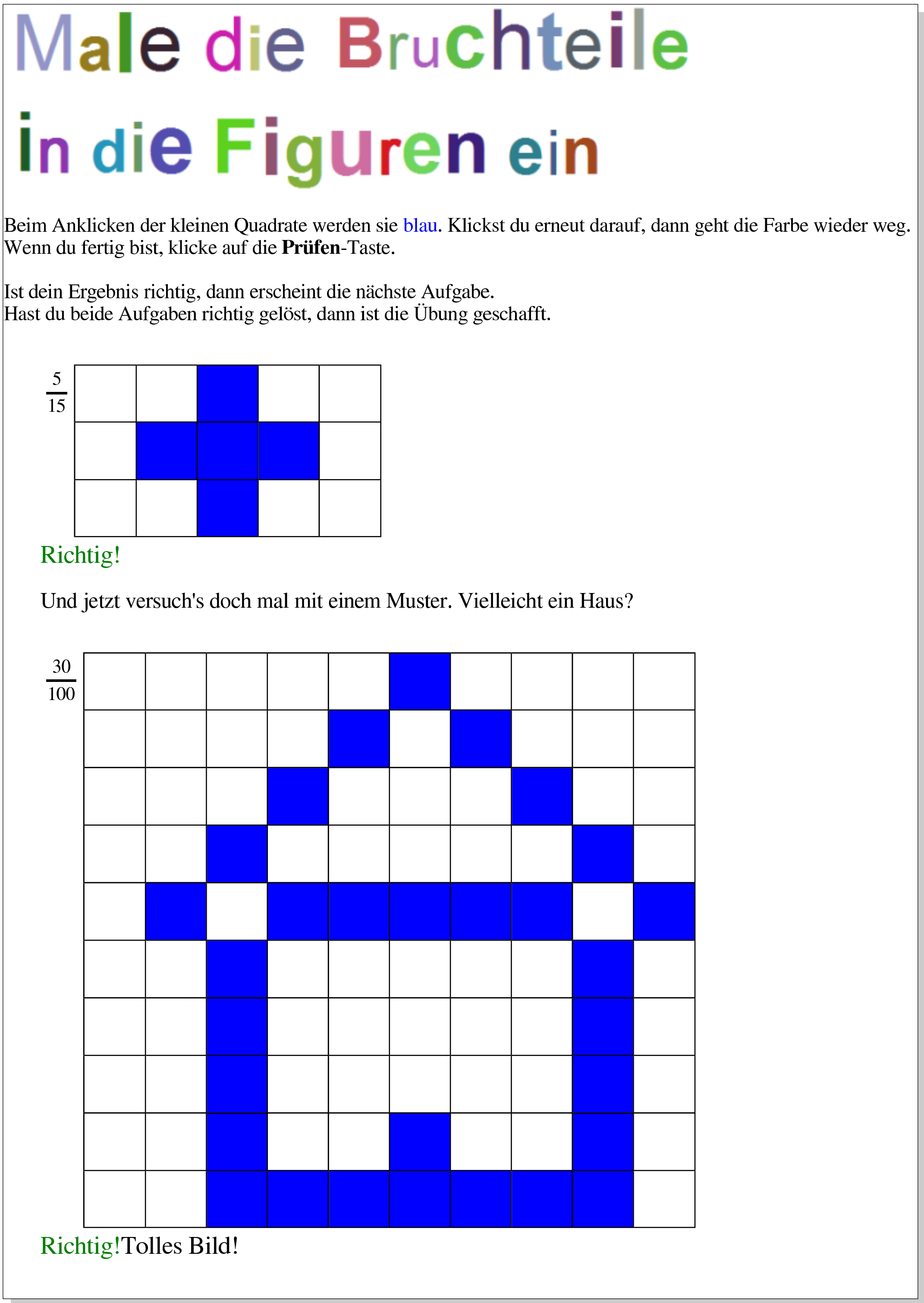
? $\frac{3}{5}$

? $\frac{3}{2}$

? $\frac{1}{6}$

Zurück zum Lernpfad

B.3 Interaktive Aufgabe „Male die Bruchteile in die Figuren ein”


Male die Bruchteile in die Figuren ein

Beim Anklicken der kleinen Quadrate werden sie blau. Klickst du erneut darauf, dann geht die Farbe wieder weg.
Wenn du fertig bist, klicke auf die **Prüfen**-Taste.

Ist dein Ergebnis richtig, dann erscheint die nächste Aufgabe.
Hast du beide Aufgaben richtig gelöst, dann ist die Übung geschafft.

$\frac{5}{15}$

Richtig!

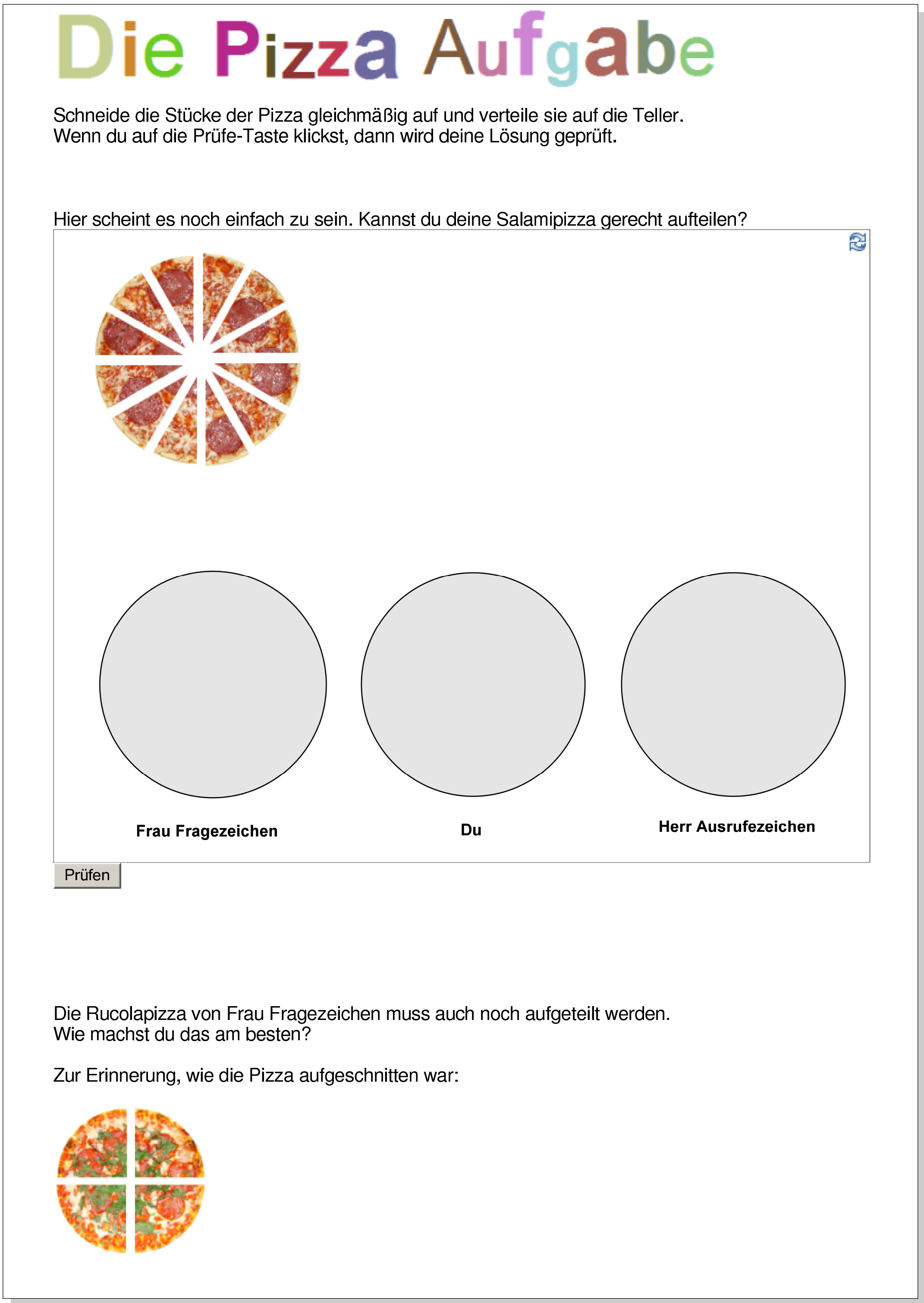
Und jetzt versuch's doch mal mit einem Muster. Vielleicht ein Haus?

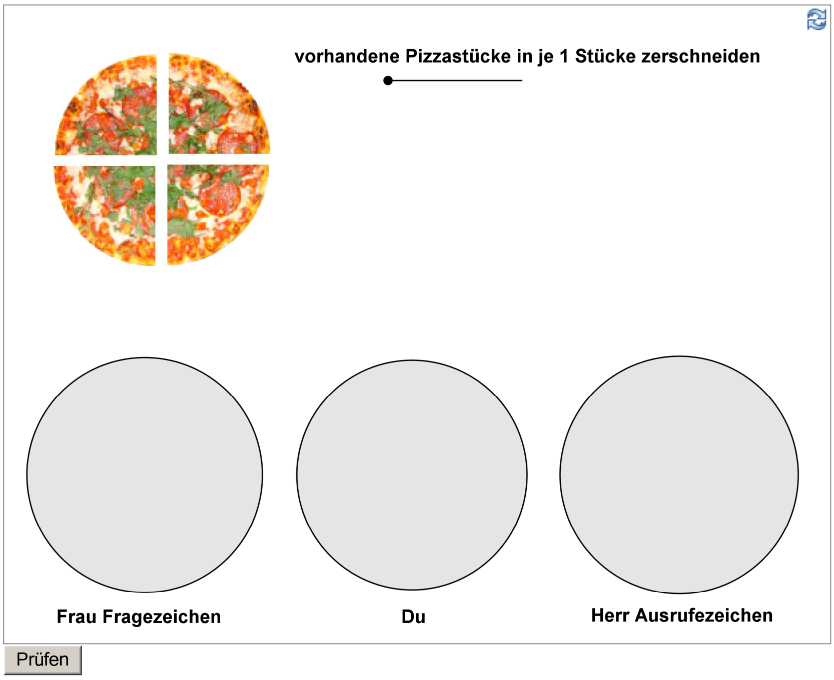
$\frac{30}{100}$

Richtig!Tolles Bild!

B.4 Suchbild „Finde die Unterschiede”

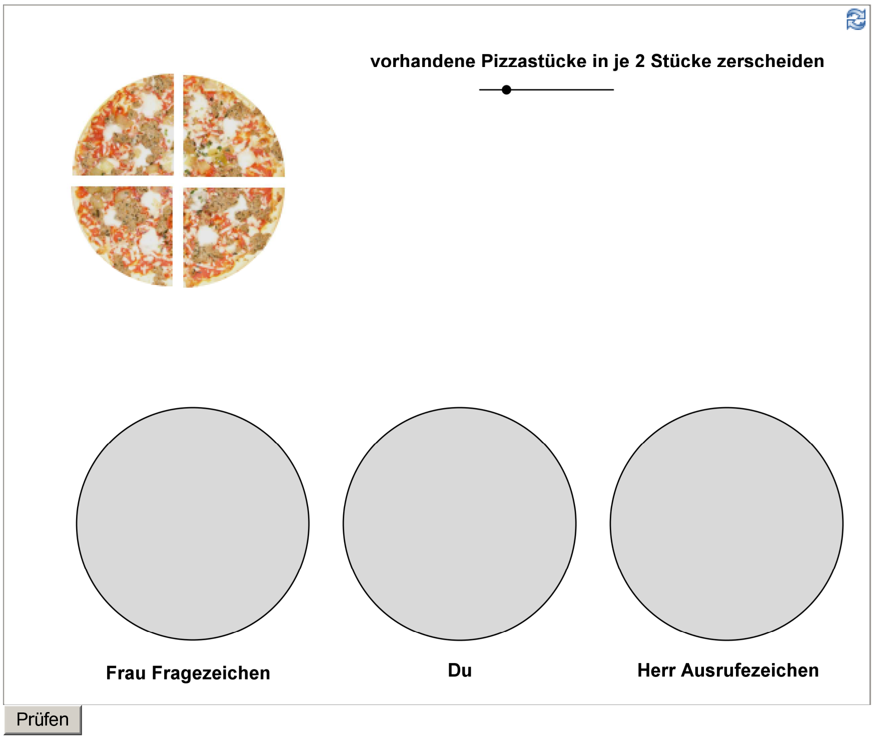
B.5 Interaktive Aufgabe „Die Pizza Aufgabe”





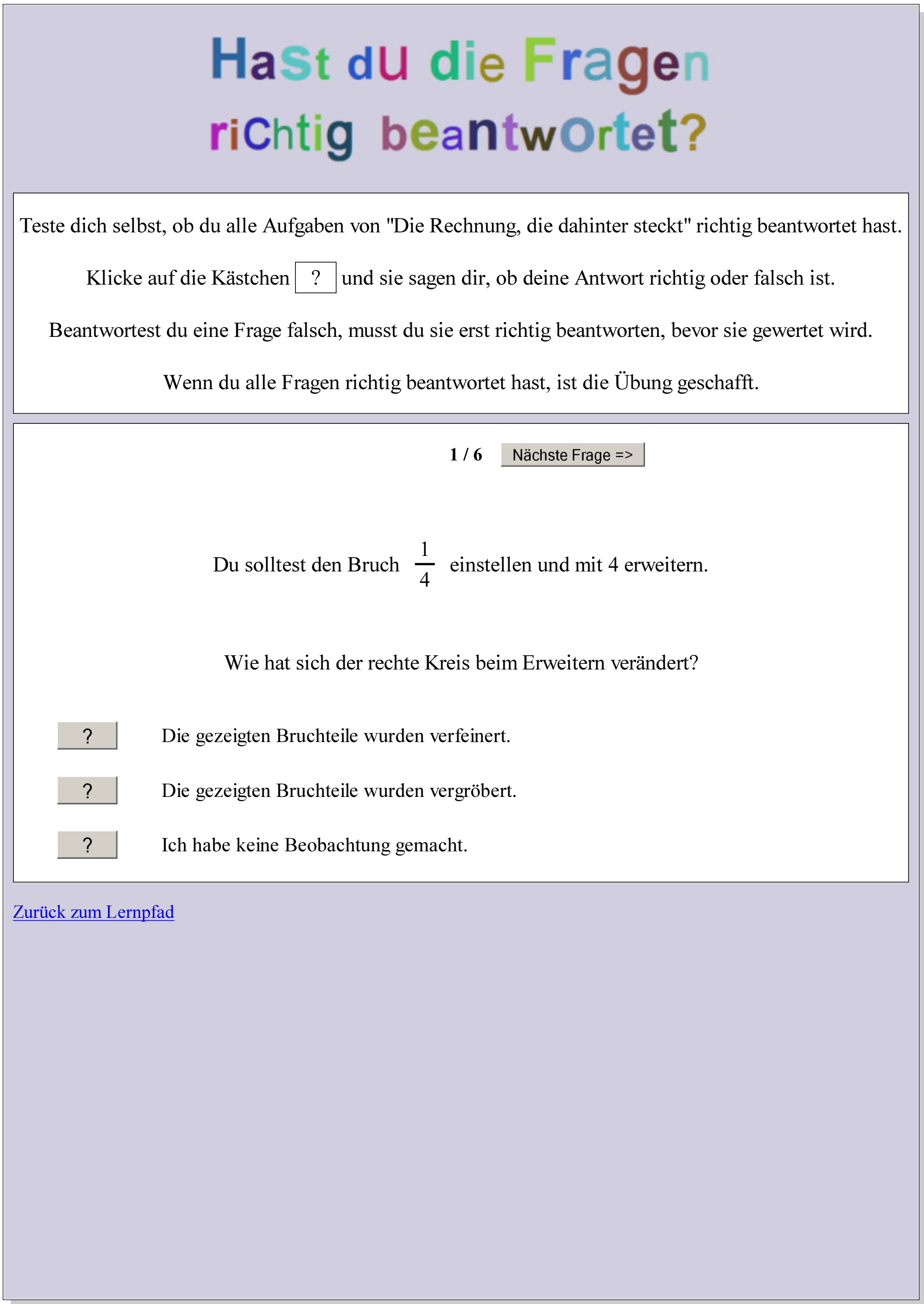
Die Thunfischpizza von Herr Ausrufezeichen fehlt noch.
Hier gibt es eine schnelle und eine nicht ganz so schnelle Lösung, die Pizzen gerecht aufzuteilen.
Entscheide dich für eine Lösung und prüfe sie.

Zur Erinnerung, wie die Pizza aufgeschnitten war:

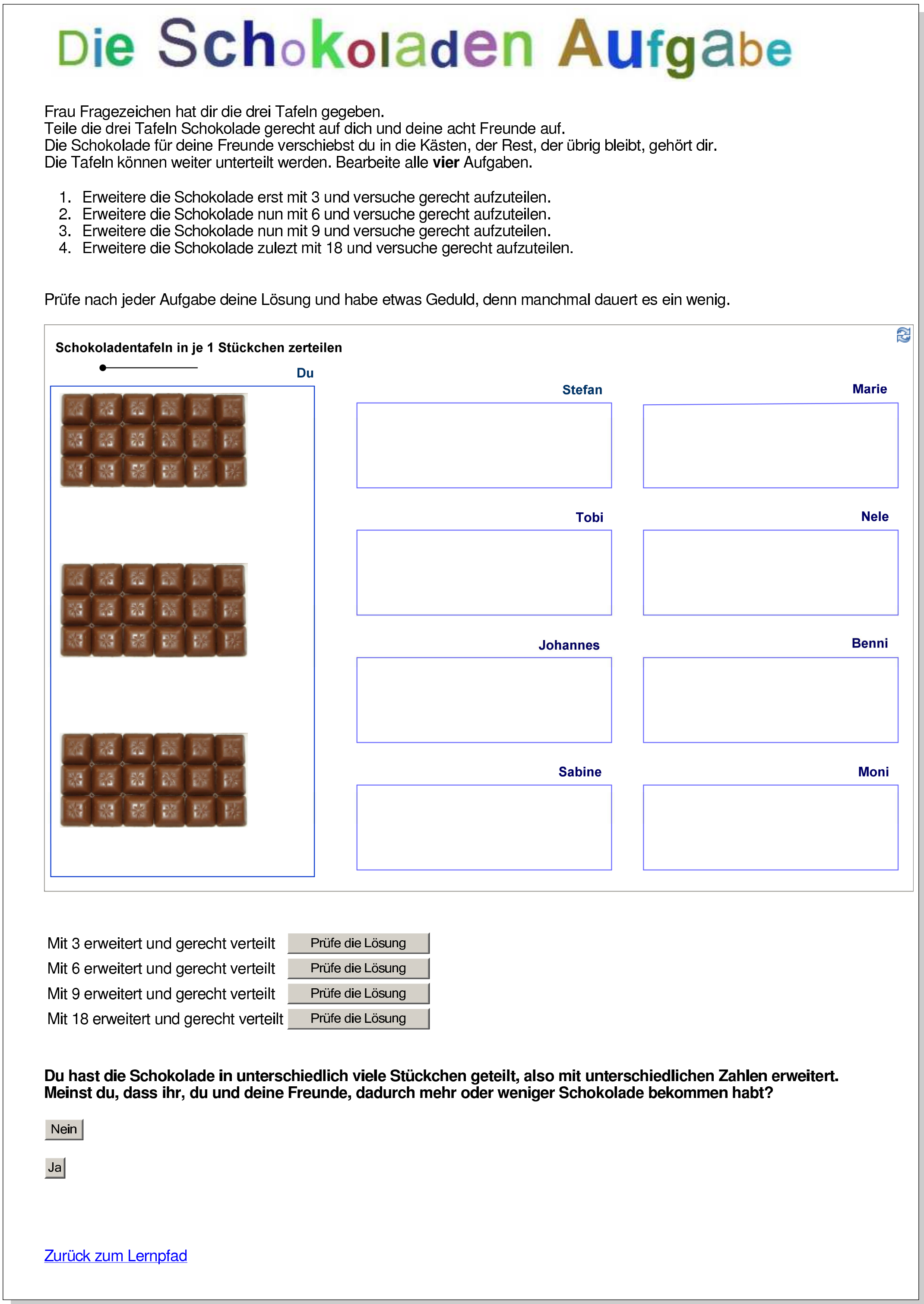


Zurück zum Lernpfad

B.6 Quiz „Hast du die Fragen richtig beantwortet?"

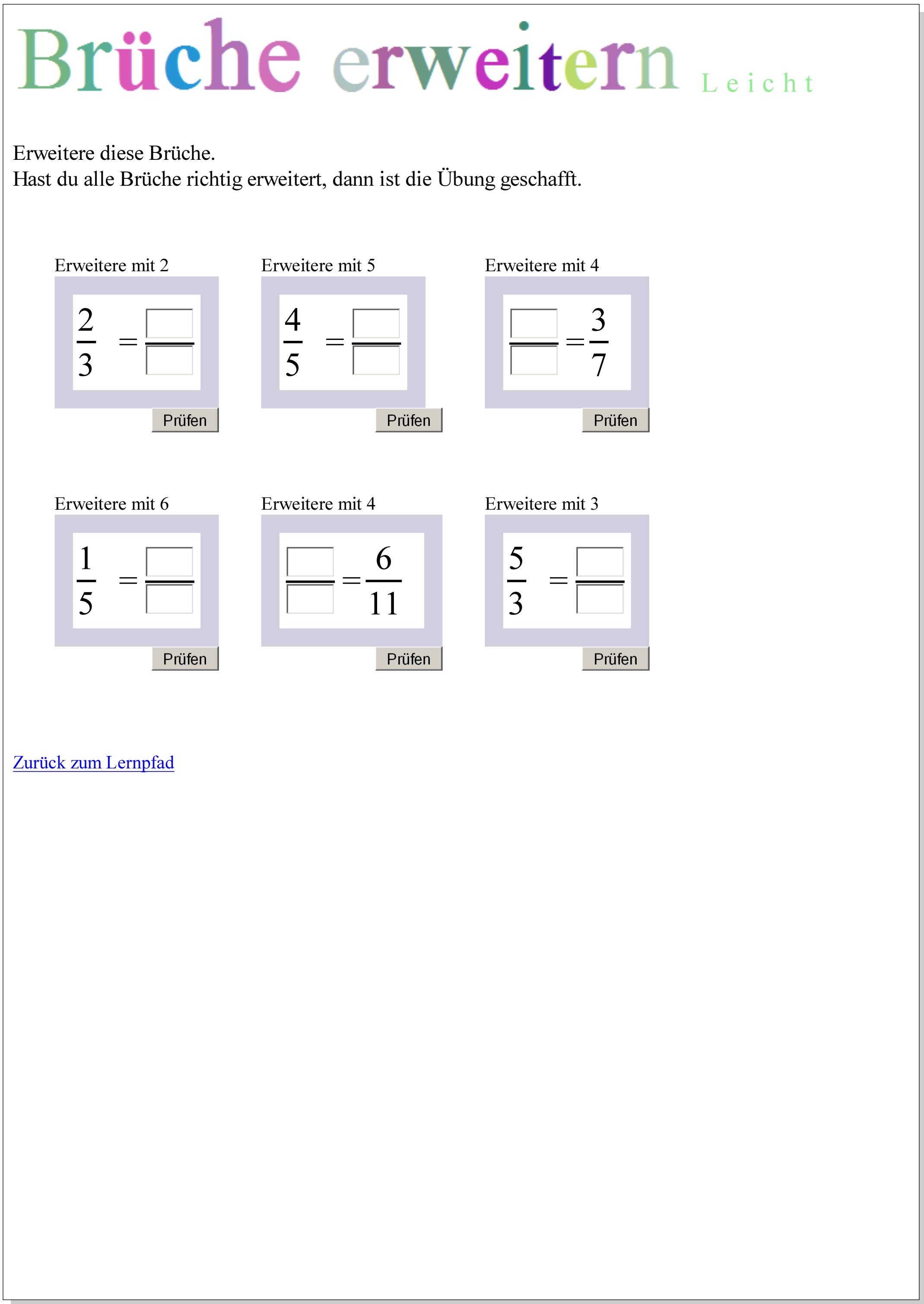


B.7 Interaktive Aufgabe „Die Schokoladen Aufgabe”



B.8 Aufgabensammlung

B.8.1 Berechne die erweiterte Zahl



B.8.2 Mit welcher Zahl wurde erweitert?

Mit welcher Zahl wurde erweitert?

Mit welcher Zahl musst du Zähler und im Nenner erweitern, damit beide Brüche den gleichen Wert haben?
Hast du alle Erweiterungszahlen richtig eingetragen, dann ist die Übung geschafft.

$\frac{1 \cdot \square}{2 \cdot \square} = \frac{4}{8}$ Prüfen

$\frac{2 \cdot \square}{3 \cdot \square} = \frac{6}{9}$ Prüfen

$\frac{4 \cdot \square}{5 \cdot \square} = \frac{16}{20}$ Prüfen

$\frac{7 \cdot \square}{2 \cdot \square} = \frac{14}{4}$ Prüfen

$\frac{30}{35} = \frac{6 \cdot \square}{7 \cdot \square}$ Prüfen

$\frac{3 \cdot \square}{8 \cdot \square} = \frac{21}{56}$ Prüfen

Zurück zum Lernpfad

B.8.3 Erweitere auf den gleichen Wert

Erweitere auf den gleichen Wert

Erweitere diese Brüche so, dass beide den gleichen Wert haben.
Hast du alle Brüche richtig erweitert, dann ist die Übung geschafft.

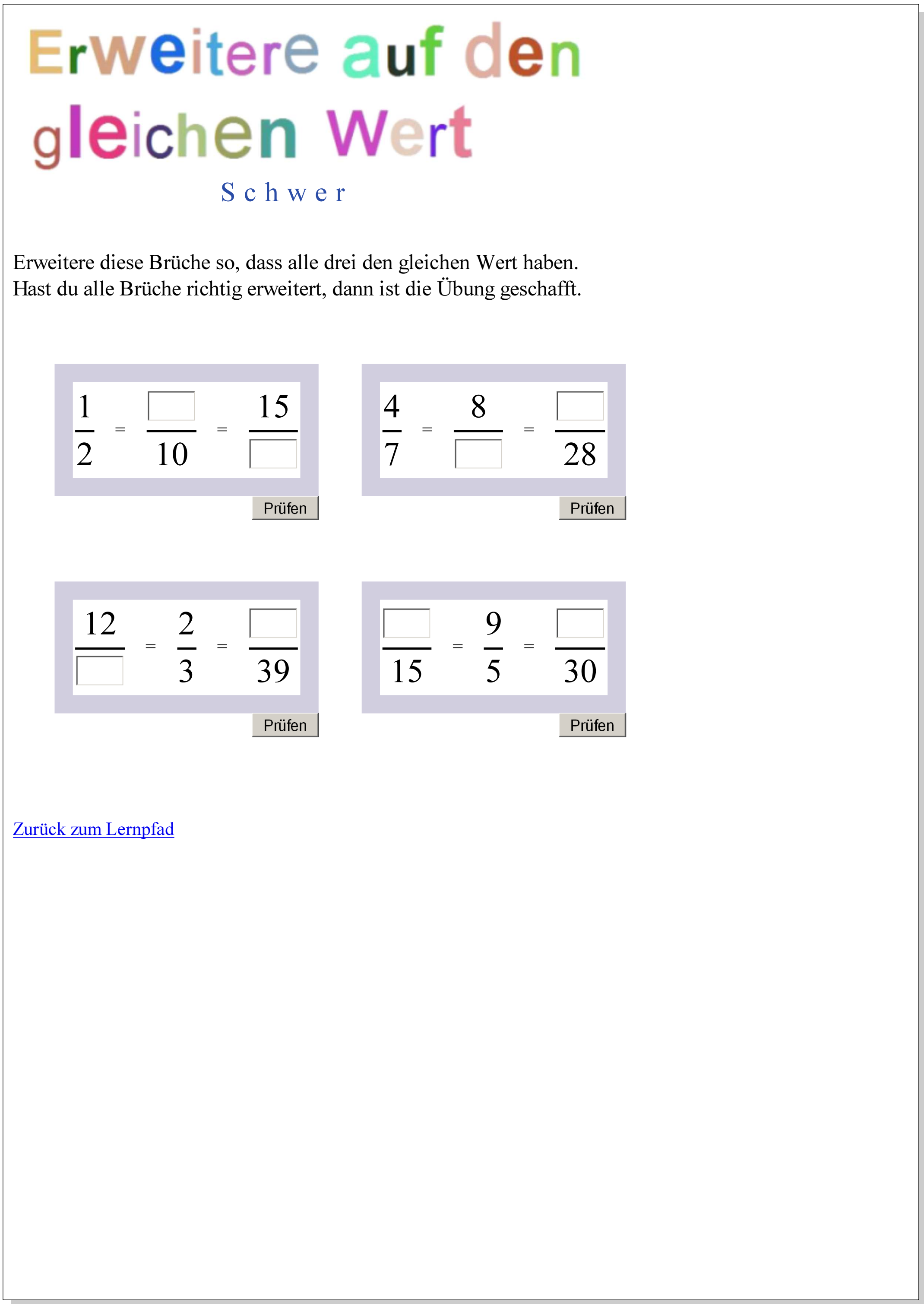
$\frac{1}{2} = \frac{\square}{10}$ Prüfen

$\frac{3}{7} = \frac{12}{\square}$ Prüfen

$\frac{2}{3} = \frac{12}{\square}$ Prüfen

$\frac{12}{3} = \frac{\square}{9}$ Prüfen

Zurück zum Lernpfad



Erweitere auf den gleichen Wert

Schwer

Erweitere diese Brüche so, dass alle drei den gleichen Wert haben.
Hast du alle Brüche richtig erweitert, dann ist die Übung geschafft.

$\frac{1}{2} = \frac{\square}{10} = \frac{15}{\square}$ Prüfen

$\frac{4}{7} = \frac{8}{\square} = \frac{\square}{28}$ Prüfen

$\frac{12}{\square} = \frac{2}{3} = \frac{\square}{39}$ Prüfen

$\frac{\square}{15} = \frac{9}{5} = \frac{\square}{30}$ Prüfen

Zurück zum Lernpfad

B.8.4 Quiz: Richtig oder falsch?

Richtig oder falsch?

Wurde hier richtig oder falsch erweitert?

Klicke auf die Kästchen ? und sie sagen dir, ob deine Antwort richtig oder falsch ist.

Beantwortest du eine Frage falsch, musst du sie erst richtig beantworten, bevor sie gewertet wird.

Wenn du alle Fragen richtig beantwortet hast, ist die Übung geschafft.

1 / 6 Nächste Frage =>

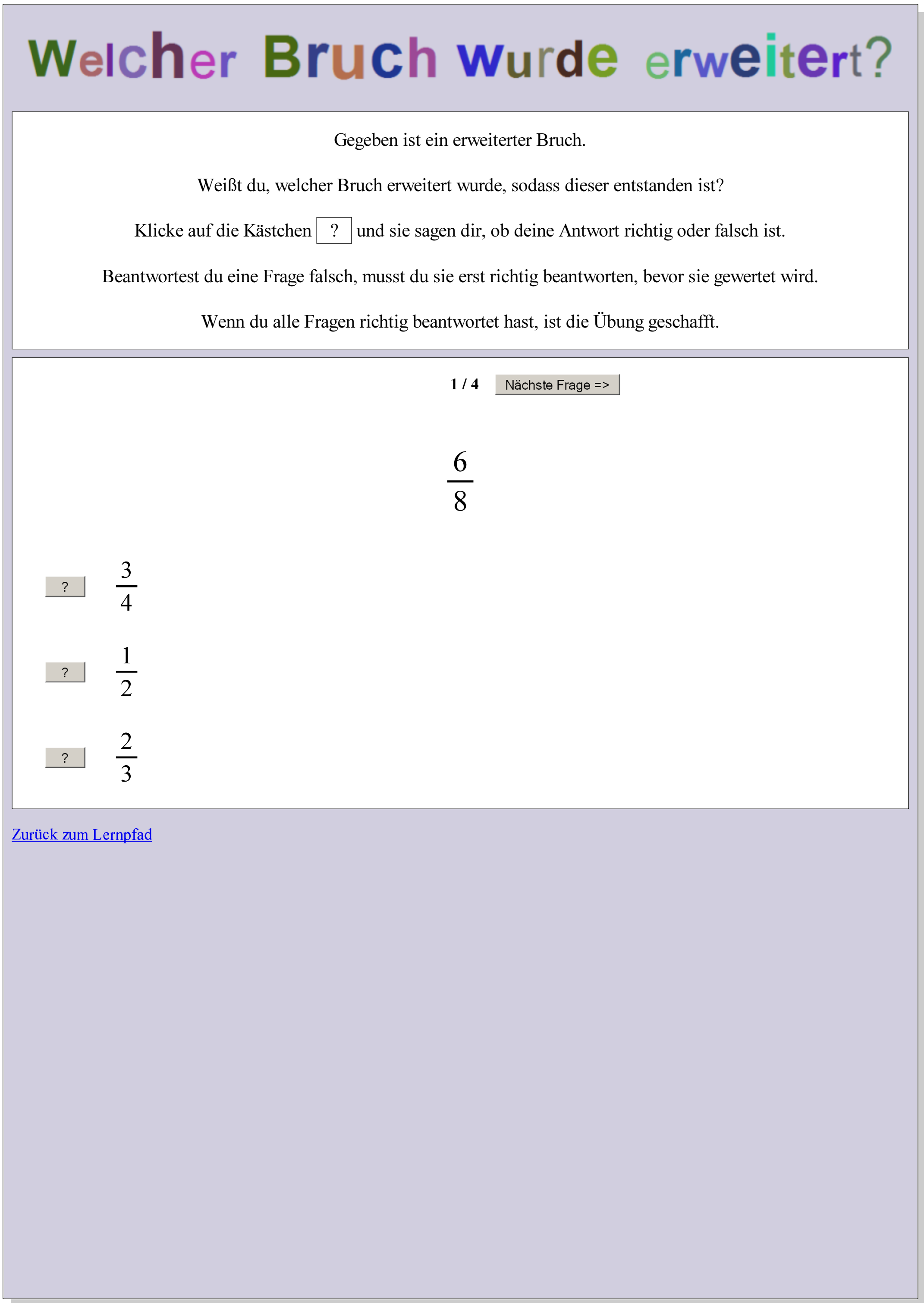
$$\frac{2}{6} = \frac{4}{12}$$

? RICHTIG

? FALSCH

Zurück zum Lernpfad

B.8.5 Quiz: Welcher Bruch wurde erweitert?



B.8.6 Erweitere auf den gleichen Nenner

Erweitere auf einen Nenner

Erweitere diese Brüche auf einen Nenner.
Hast du alle Brüche richtig erweitert, dann ist die Übung geschafft.

Erweitere auf gemeinsamen Nenner **10**

$$\frac{2}{5} = \frac{\square}{\square}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\square}{\square}$$

Prüfen

Erweitere auf gemeinsamen Nenner **28**

$$\frac{5}{7} = \frac{\square}{\square}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{\square}{\square}$$

Prüfen

Erweitere auf gemeinsamen Nenner **20**

$$\frac{\square}{\square} = \frac{9}{4}$$

$$\frac{\square}{\square} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{\square}{\square} = \frac{7}{10}$$

Prüfen

Zurück zum Lernpfad

Anhang C

Lernpfad „Brüche kürzen”

Mathematik-digital/Kürzen von Brüchen

aus ZUM-Wiki, dem Wiki für Lehr- und Lerninhalte auf ZUM.de

< Mathematik-digital(Weitergeleitet von Benutzer:Katja Heimlich/Lernpfad Kürzen)

zurück zum Lernpfad Brüche erweitern

Lernpfad

Brüche kürzen

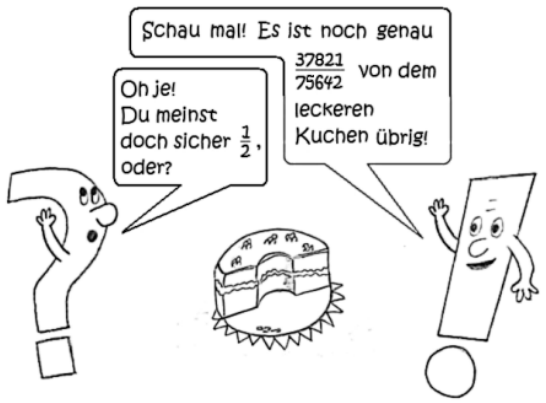
Teil 2 der Lernpfadgruppe: Brüche erweitern, kürzen und vergleichen.

- **Zeitbedarf: in der Probephase**
- **Material: Laufzettel**

Kurzinfo:

Diese Seite gehört zu **mathematik-digital.**

zur Linkdatenbank



Das ist ja viel übersichtlicher, wenn man im Zähler und im Nenner nicht so große Zahlen stehen hat, das findest du doch auch, oder?!

Station Los geht's, wir machen alles übersichtlicher!

[Rechtsklick:] In diesem Zimmer liegt alles herum. Hilf mit, dann geht es schneller.

Nachdem du beim Zimmeraufräumen geholfen hast, kannst du dich mit deinen Freunden verabreden. [Rechtsklick:] Sortiere doch schon mal die Süßigkeiten, damit jeder das bekommt, was ihm schmeckt.

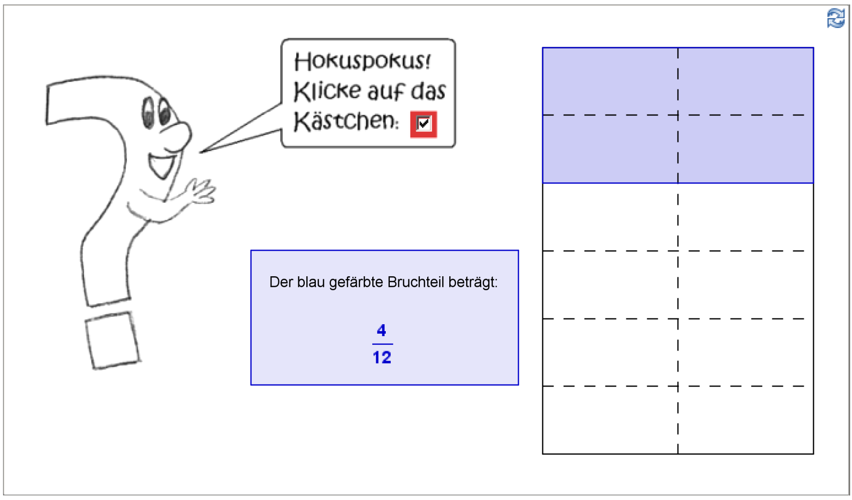
Du hast gesehen, dass du aus einem Bruch, wie $\frac{6}{18}$ durch sortieren

oder aufräumen den Bruch $\frac{1}{3}$ zaubern kannst.

Aber was steckt hier dahinter?

Dazu schau dir die folgende Aufgabe an.

Welcher Bruchteil ist zu Beginn blau gefärbt? Welcher Bruchteil ist gefärbt, wenn du das Kästchen drückst?



Damit die Zahlen im Zähler und im Nenner nicht so groß sind, kannst du einzelne Unterteilungen entfernen, aber nicht alle. Willst du versuchen, ob du unnötige Unterteilungen entfernen kannst?

[Rechtsklick:] Hier hast du die Möglichkeit, es herauszufinden.

Station Einführung Kürzen

Begriff Kürzen

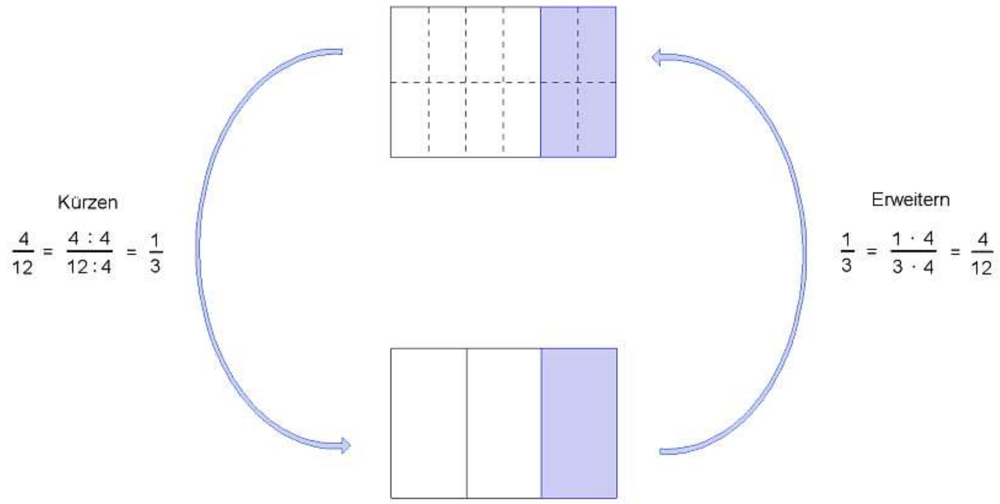
Was du gerade gemacht und beobachtet hast, nennt sich **Kürzen**.

Beim Kürzen eines Bruches vergröberst du die gezeigten Bruchteile, indem du die unnötigen Unterteilungen entfernst.

Wie du gesehen hast, ändert sich auch beim Kürzen der Bruchteil nicht.

Kommt dir das bekannt vor? [Lösung ausblenden]

Kürzen ist das Gegenteil von Erweitern, allerdings mit einigen Besonderheiten.



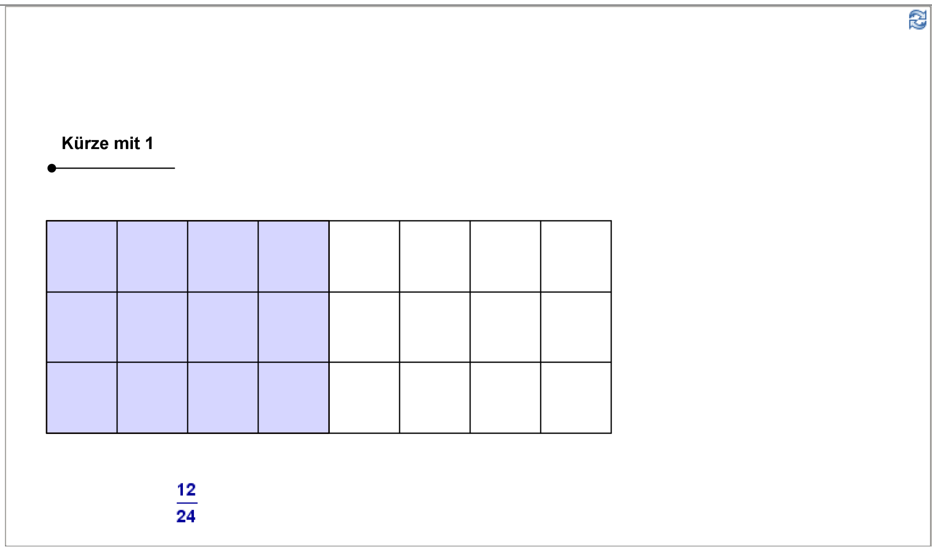
Die Rechnung, die dahinter steckt

Hier hast du ein Rechteck. Von dem Rechteck sind $\frac{12}{24}$ blau gefärbt.

Der Bruchteil lässt sich kürzen, dazu musst du den Schieberegler verschieben.

Bearbeite nun folgende Aufgaben und schreibe alles auf deinen Laufzettel, du wirst die Antworten noch brauchen.

1. Welche Zahlen sind zum Kürzen eingestellt?
2. Kürze nun mit **2**. Wie verändert sich der Zähler?
3. Kürze als nächstes mit **6**. Wie verändert sich der Nenner?
4. Kürze zum Schluss mit **4**. Wie verändern sich Zähler und Nenner?
5. Überlege dir, warum es die **5** nicht auf dem Schieberegler gibt.



Quiz: Hast du alle Fragen richtig beantwortet?

Das waren ganz schön viele Fragen! Teste dich selbst, was und wieviel du richtig beantwortet hast.

[Rechtsklick:] Hier geht's lang.

Station Kürzen

Schreibe dir den Merksatz in dein Heft:

Ein Bruch wird gekürzt, indem man den Zähler und den Nenner durch die selbe Zahl dividiert.
Diese Zahl ist ein **gemeinsamer Teiler** von Zähler und Nenner.

Beispiel: $\frac{12}{18} = \frac{12:6}{18:6} = \frac{2}{3}$

Wie oft und mit welchen Zahlen kannst du einen Bruch kürzen?

Kreuze die Antwort an, von der du glaubst, sie sei richtig.

Wenn du alle Fragen beantwortet hast, klicke auf die **Korrektur**-Taste.

Dass die Zahl, mit der du kürzen kannst, ein gemeinsamer Teiler von Zähler und Nenner sein muss,

hast du schon festgestellt.

Wie viele gemeinsame Teiler von Zähler und Nenner findest du...

1. **...für den Bruch $\frac{4}{8}$?**

- ☐ zwei, nämlich 2 und 4
- ☐ einen, nämlich 4
- ☐ drei und zwar 1, 2 und 4

2. **...für den Bruch $\frac{1}{8}$?**

- ☐ zwei, nämlich 2 und 4
- ☐ einen, nämlich 1
- ☐ keinen

3. **Die 1 ist immer ein gemeinsamer Teiler von Zähler und Nenner, denn jede Zahl ist durch 1 teilbar. Was machst du, wenn du keinen gemeinsamen Teiler außer 1 findest?**

- ☐ Ich kann zwar mit 1 kürzen, aber der Bruch ändert sich dadurch nicht.
- ☐ Das passiert nicht. Man findet immer noch weitere gemeinsame Teiler!

4. **Kannst du mit 0 kürzen?**

- ☐ Ja
- ☐ Nein

Korrektur

Das ist wichtig, bitte schreibe dir den folgenden Merksatz in dein Heft.

[Verstecken]

Kannst du außer 1 keinen gemeinsamen Teiler von Zähler und Nenner finden,
dann heißt der Bruch **vollständig gekürzt**.
Du kannst dann den Bruch nicht weiter vereinfachen oder übersichtlicher machen.

Beispiel:

$\frac{4}{6}$ kann noch mit **2** gekürzt werden: $\frac{4}{6} = \frac{4:2}{6:2} = \frac{2}{3}$.

$\frac{2}{3}$ hat außer 1 keinen weiteren gemeinsamen Teiler für Zähler und Nenner und ist vollständig gekürzt.

Wie kannst du einen Bruch vollständig kürzen?

[Rechtsklick:] Finde es heraus!

Um einen Bruch vollständig zu kürzen, kürzt du solange mit gemeinsamen Teilern von Zähler und Nenner, bis du keinen außer 1 mehr findest.

Die Zeit läuft ab jetzt...

In einer Stegreifaufgabe oder in einer Schulaufgabe ist die Zeit knapp!

Wenn du kürzen sollst, dann musst du dem Zähler und dem Nenner einen gemeinsamen Teiler ansehen.

Aber erinnerst du dich noch an die Teilbarkeitsregeln?

Sie können dir helfen einen gemeinsamen Teiler schneller zu sehen.

Jetzt solltest du fit sein und gemeinsame Teiler auch in kurzer Zeit finden können.

Station Übungen zum Kürzen

Bearbeite von links nach rechts alle vier Übungen.

Gibt es mehrere Aufgaben oder Schwierigkeiten zur Auswahl, dann musst du nur **eine** der Aufgaben bearbeiten.

Die Farben können dir bei deiner Entscheidung helfen:

leicht mittelschwer schwer

1. Übung	2. Übung	3. Übung	4. Übung
Kürze!	**Mit welcher Zahl wurde gekürzt?** oder **Quiz: Findest du die passende Zahl?**	**Quiz: Richtig oder falsch gekürzt?**	**Kürze so weit wie möglich**
[Rechtsklick:] leicht	[Rechtsklick:] Mit welcher Zahl wurde gekürzt?		
[Rechtsklick:] mittelschwer	[Rechtsklick:] Quiz mittelschwer	[Rechtsklick:] Findest du den Fehler?	[Rechtsklick:] mittelschwer
	[Rechtsklick:] Quiz schwer		[Rechtsklick:] schwer

weiter zum Lernpfad Brüche vergleichen

Von „http://wiki.zum.de/Mathematik-digital/K%C3%BCrzen_von_Br%C3%BCchen“
Kategorien: Mathematik-digital | Bruchrechnung

- Diese Seite wurde zuletzt am 31. Oktober 2008 um 13:34 Uhr geändert.
-

Anhang D

Externe Aufgaben zu „Brüche kürzen”

D.1 Interaktive Aufgabe „Zimmer aufräumen”

Zimmer aufräumen

Bearbeite alle drei Aufgaben.

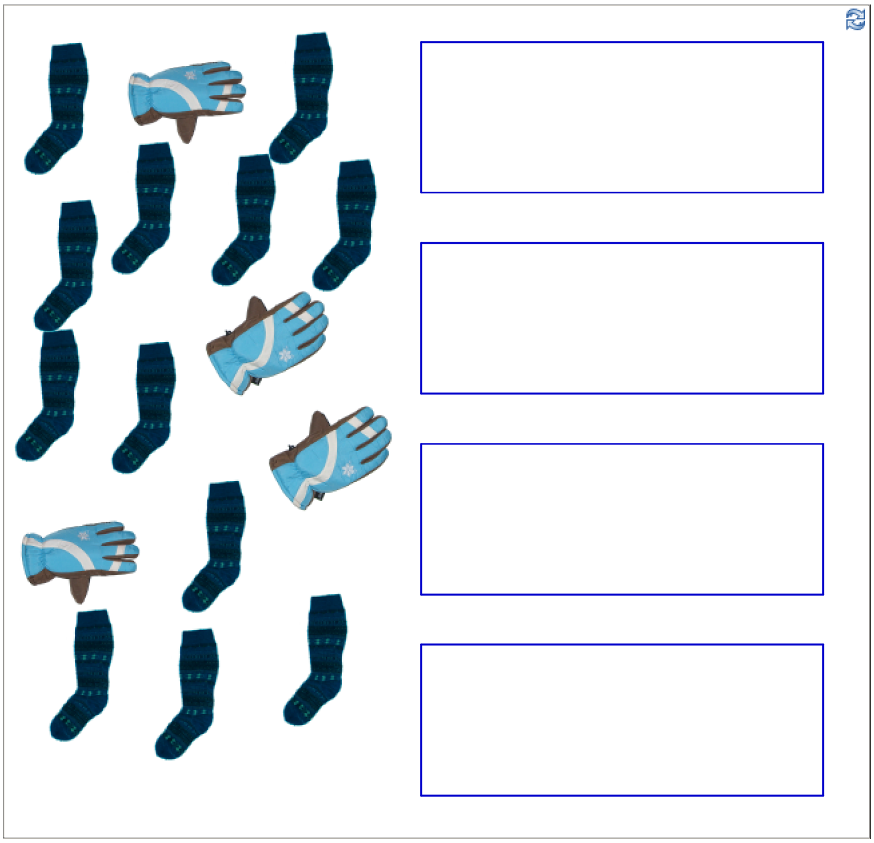
1. Aufgabe

Welchen Bruchteil stellen die blauen Socken in dem gesamten Kasten dar?

Hilfe

Für den **Zähler**: Zähle die Anzahl der Socken. Für den **Nenner**: Zähle die Anzahl aller Socken und Handschuhe.

Prüfen



2. Aufgabe

Räume die Handschuhe alle in eine Schublade und in die anderen drei Schubladen räumst du je

gleichviele Socken.
Die Kleidungsstücke müssen richtig in den Schubladen sein, damit deine Lösung richtig ist.

Prüfe deine Lösung

Hab' ein wenig Geduld! Manchmal dauert die Prüfung etwas.

3. Aufgabe

Jetzt hast du die Kleidung sortiert. Die Socken sind in drei Schubladen. Welchen Bruchteil stellen die Schubladen mit den Socken dar?

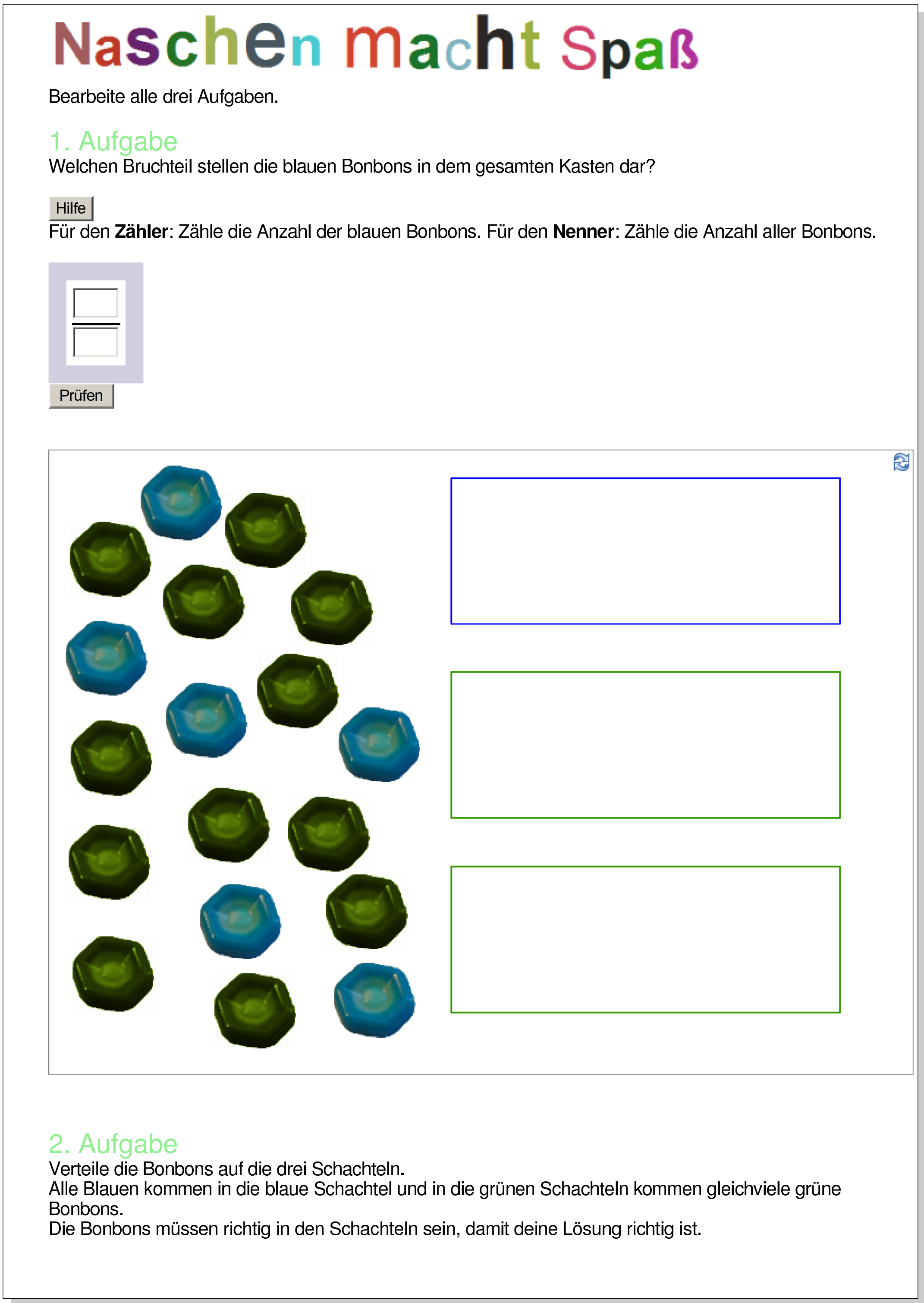
noch mehr Hilfe

Für den **Zähler**: Zähle die Anzahl der Schubladen, in denen Socken sind. Für den **Nenner**: Zähle die Anzahl aller Schubladen.

Prüfen

Zurück zum Lernpfad

D.2 Interaktive Aufgabe „Naschen macht Spaß”



Prüfe deine Lösung

Hab' ein wenig Geduld! Manchmal dauert die Prüfung etwas.

3. Aufgabe

Jetzt hast du die Bonbons sortiert. Die blauen Bonbons sind in einer Schachtel. Welchen Bruchteil stellt die Schachtel mit den blauen Bonbons dar?

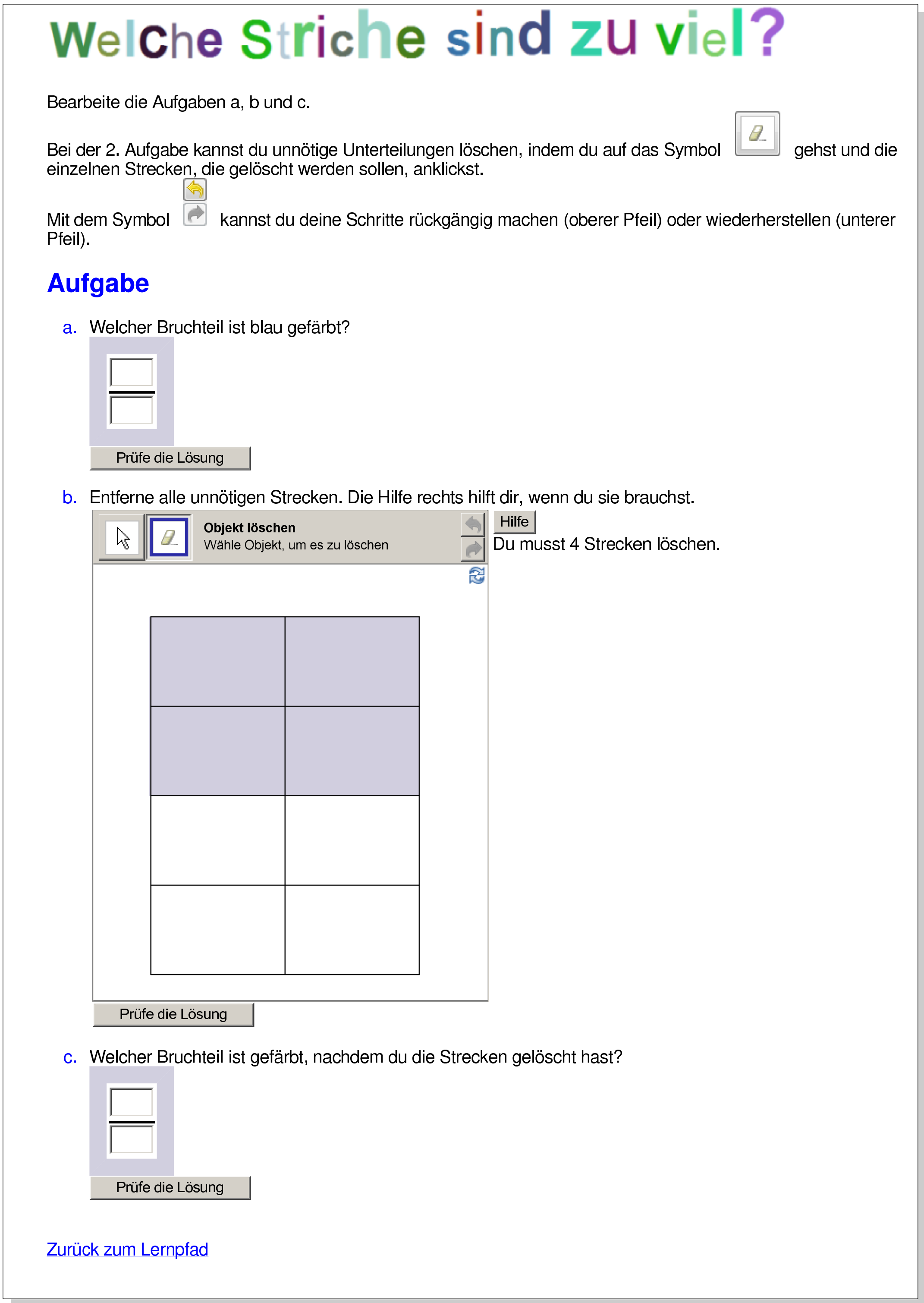
noch mehr Hilfe

Für den **Zähler**: Zähle die Anzahl der Schachteln, in denen blaue Bonbons sind. Für den **Nenner**: Zähle die Anzahl aller Schachteln.

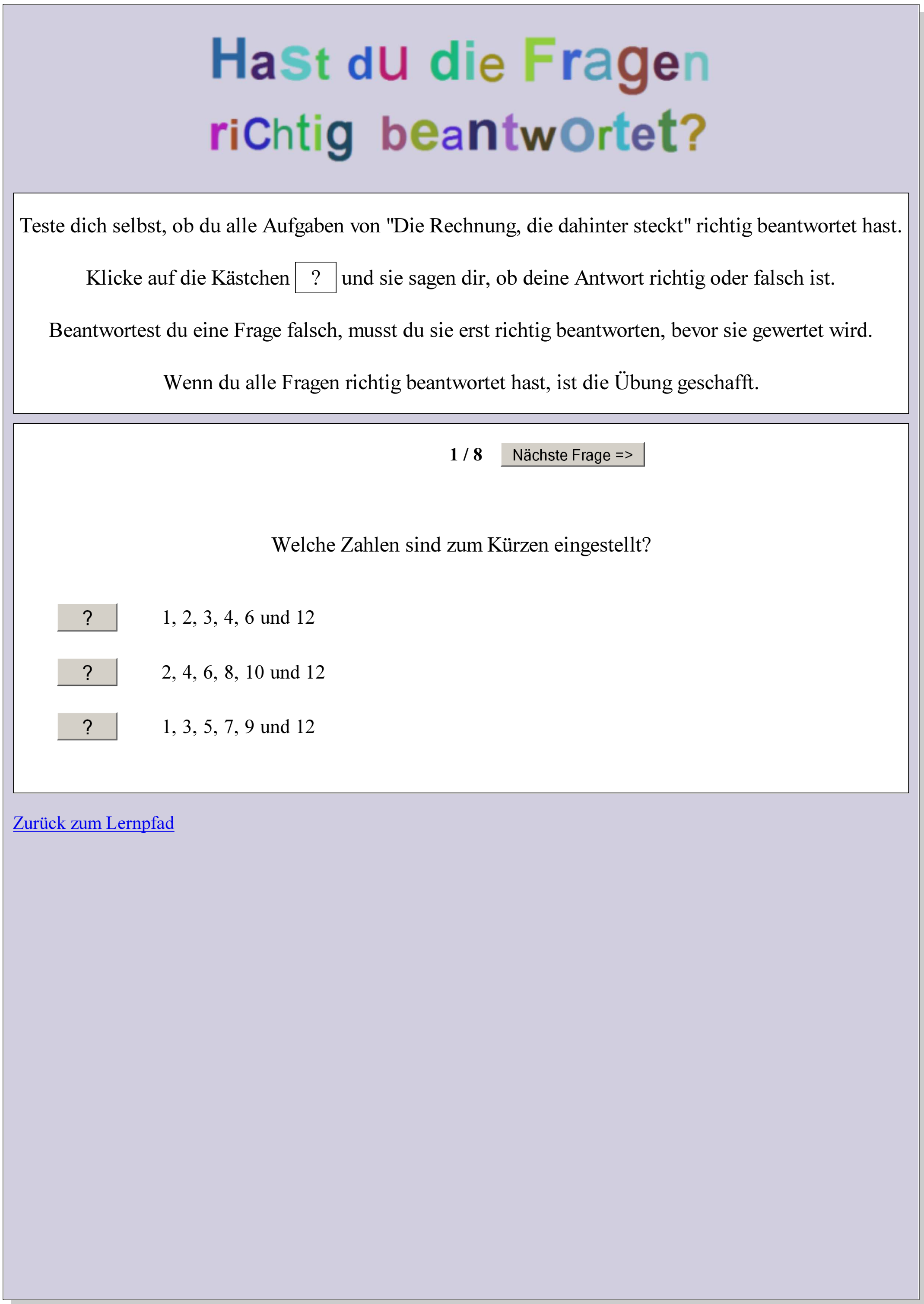
Prüfen

Zurück zum Lernpfad

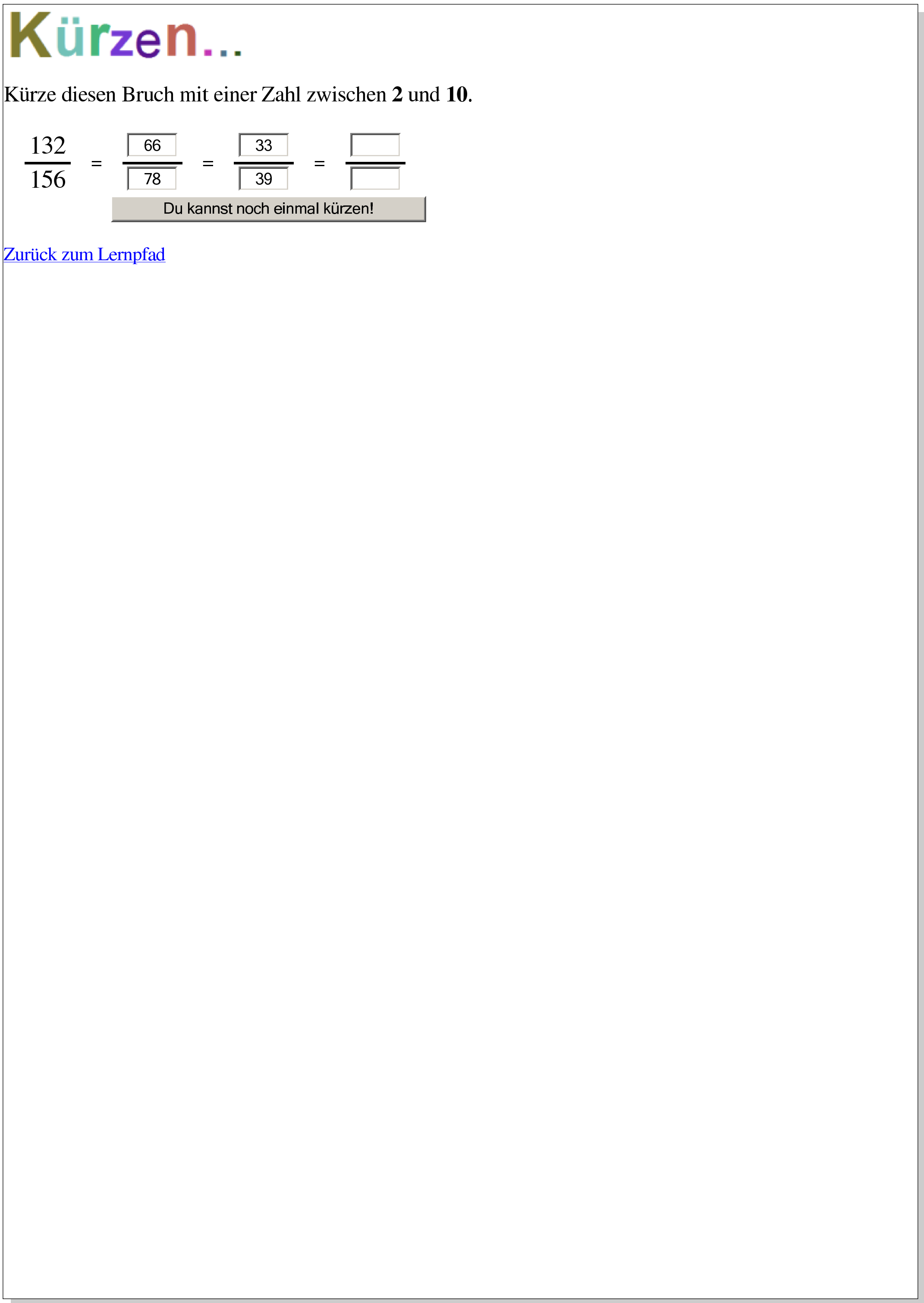
D.3 Interaktive Aufgabe „Welche Striche sind zu viel?”



D.4 Quiz „Hast du die Fragen richtig beantwortet?”



D.5 Externe Aufgabe „Kürzen..."



Kürzen...

Kürze diesen Bruch mit einer Zahl zwischen **2** und **10**.

$$\frac{132}{156} = \frac{66}{78} = \frac{33}{39} = \frac{}{}$$

Du kannst noch einmal kürzen!

Zurück zum Lernpfad

D.6 Wiederholung der Teilbarkeitsregeln

Mathematik-digital/Teilbarkeitsregeln

aus ZUM-Wiki, dem Wiki für Lehr- und Lerninhalte auf ZUM.de

< Mathematik-digital(Weitergeleitet von Benutzer:Katja Heimlich/Teilbarkeitsregeln)

Lernpfad

Wiederholung der Teilbarkeitsregeln

Zugehörig zu der Lernpfadgruppe: Brüche erweitern, kürzen und vergleichen.

Eine Zahl ist teilbar

- durch **2**, wenn die Zahl gerade ist.
- durch **3**, wenn die Quersumme durch 3 teilbar ist.
- durch **4**, wenn die Zahl auf zwei Nullen endet oder wenn die letzten zwei Ziffern eine durch 4 teilbare Zahl bilden.
- durch **5**, wenn die Endziffer eine 0 oder 5 ist.
- durch **8**, wenn die Zahl auf drei Nullen endet oder wenn die letzten drei Ziffern eine durch 8 teilbare Zahl bilden.
- durch **9**, wenn die Quersummer durch 9 teilbar ist.
- durch **10**, wenn die Endziffer 0 ist.

Erinnerst du dich nun wieder an alle Regeln?

Teste dich:

1. 12 ist durch 2 teilbar.

☐ wahr
☐ falsch

2. 990 ist durch 9 teilbar.

☐ wahr
☐ falsch

3. 100 ist durch 8 teilbar.

- ☐ wahr
- ☐ falsch

4. 321 ist durch 9 teilbar.

- ☐ wahr
- ☐ falsch

5. 2316 ist durch 4 teilbar.

- ☐ wahr
- ☐ falsch

Korrektur

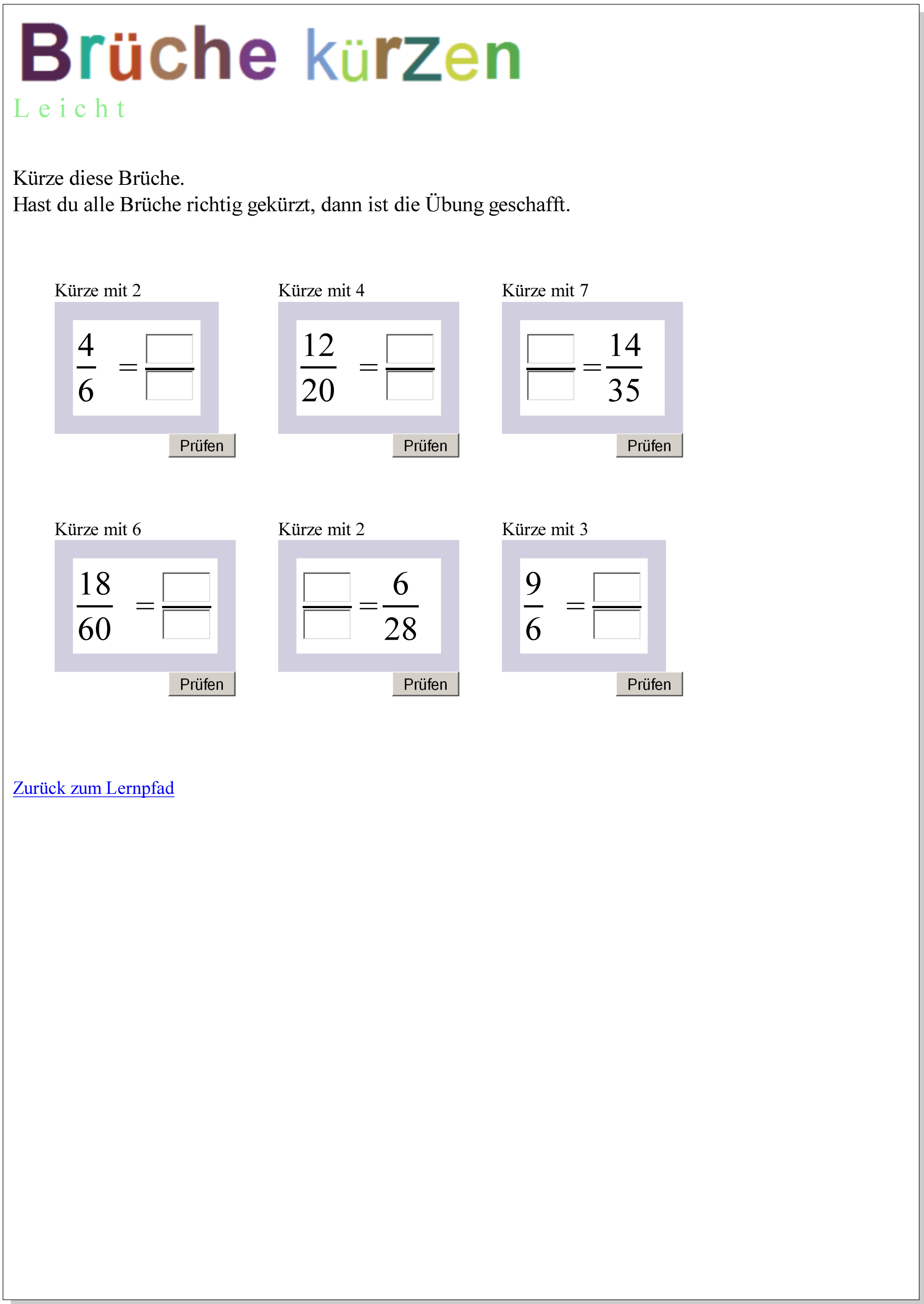
Zurück zum Lernpfad

Von „http://wiki.zum.de/Mathematik-digital/Teilbarkeitsregeln“
Kategorie: Bruchrechnung

- Diese Seite wurde zuletzt am 31. Oktober 2008 um 13:29 Uhr geändert.
-

D.7 Aufgabensammlung

D.7.1 Brüche kürzen



Brüche kürzen

Leicht

Kürze diese Brüche.
Hast du alle Brüche richtig gekürzt, dann ist die Übung geschafft.

Kürze mit 2

$\frac{4}{6} = \frac{\square}{\square}$

Prüfen

Kürze mit 4

$\frac{12}{20} = \frac{\square}{\square}$

Prüfen

Kürze mit 7

$\frac{\square}{\square} = \frac{14}{35}$

Prüfen

Kürze mit 6

$\frac{18}{60} = \frac{\square}{\square}$

Prüfen

Kürze mit 2

$\frac{\square}{\square} = \frac{6}{28}$

Prüfen

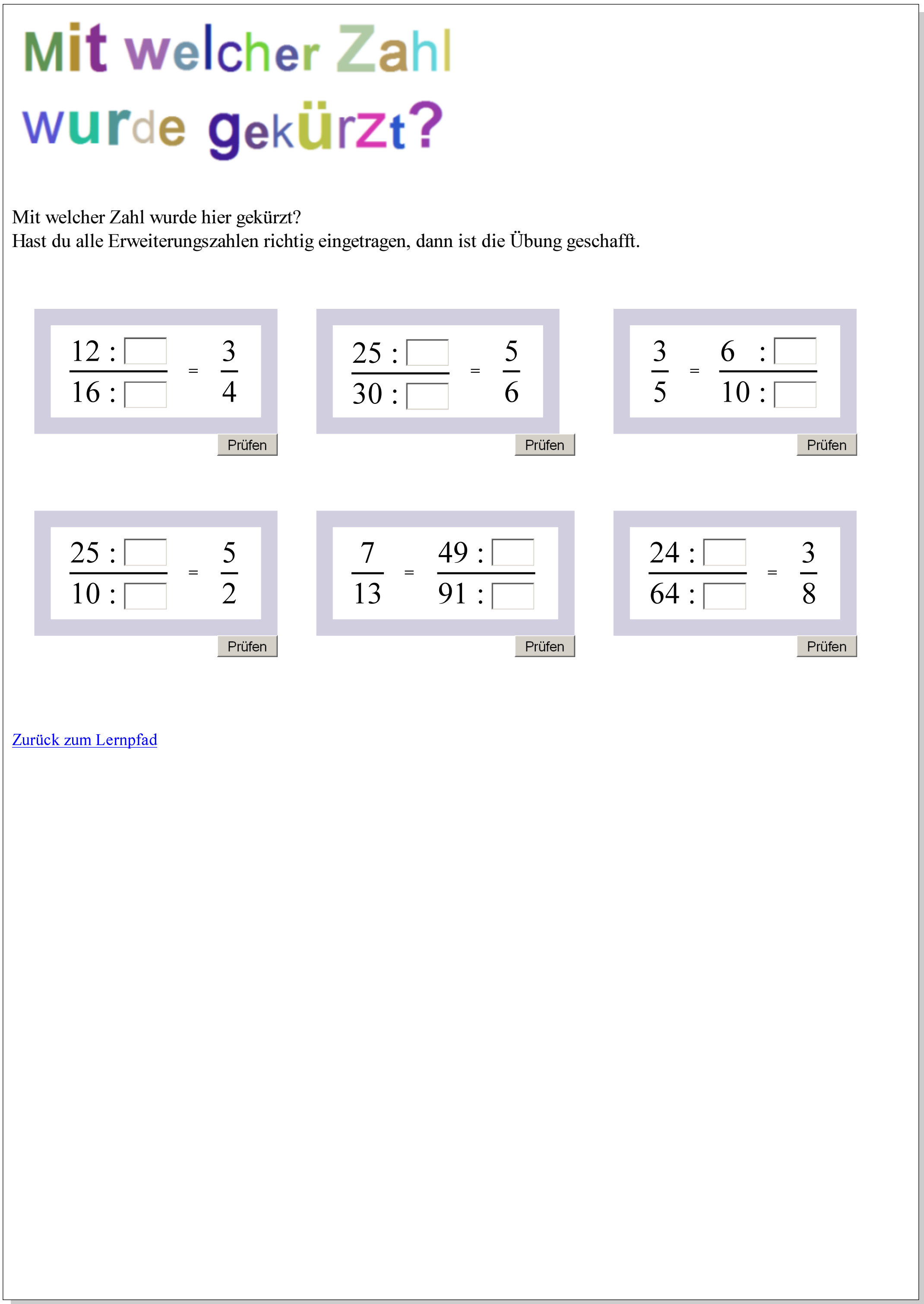
Kürze mit 3

$\frac{9}{6} = \frac{\square}{\square}$

Prüfen

Zurück zum Lernpfad

D.7.2 Mit welcher Zahl wurde gekürzt?



Mit welcher Zahl wurde gekürzt?

Mit welcher Zahl wurde hier gekürzt?
Hast du alle Erweiterungszahlen richtig eingetragen, dann ist die Übung geschafft.

$$\frac{12 : \square}{16 : \square} = \frac{3}{4}$$

Prüfen

$$\frac{25 : \square}{30 : \square} = \frac{5}{6}$$

Prüfen

$$\frac{3}{5} = \frac{6 : \square}{10 : \square}$$

Prüfen

$$\frac{25 : \square}{10 : \square} = \frac{5}{2}$$

Prüfen

$$\frac{7}{13} = \frac{49 : \square}{91 : \square}$$

Prüfen

$$\frac{24 : \square}{64 : \square} = \frac{3}{8}$$

Prüfen

Zurück zum Lernpfad

D.7.3 Quiz: Findest du die passende Zahl?

Mit welcher Zahl wurde gekürzt?

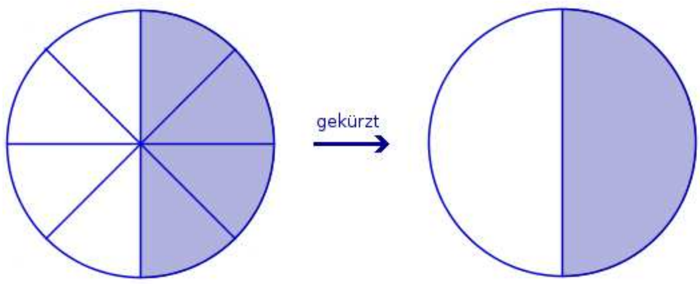
Welche Aussage passt zu dem Bild?

Klicke auf die Kästchen [?] und sie sagen dir, ob deine Antwort richtig oder falsch ist.

Beantwortest du eine Frage falsch, musst du sie erst richtig beantworten, bevor sie gewertet wird.

Wenn du alle Fragen richtig beantwortet hast, ist die Übung geschafft.

1 / 3 [Nächste Frage =>]



Welche Aussage passt zu diesem Bild?

[?] $\frac{4}{4}$ gekürzt mit 2 ergibt $\frac{2}{2}$.

[?] $\frac{4}{8}$ gekürzt mit 4 ergibt $\frac{1}{2}$.

[?] $\frac{8}{4}$ gekürzt mit 4 ergibt $\frac{2}{1}$.

Zurück zum Lernpfad

Mit welcher Zahl wurde gekürzt?

Überlege dir, welcher Bruch links und welcher rechts blau gefärbt ist.

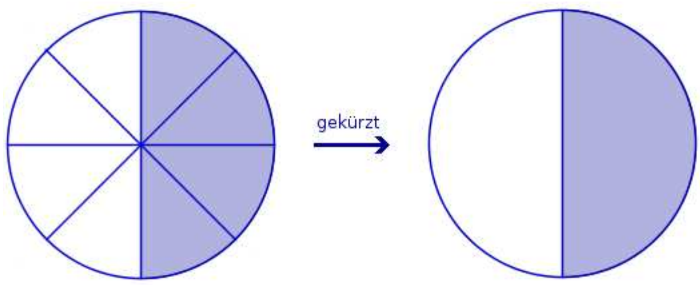
Überlege dir dann, mit welcher Zahl gekürzt wurde!

Klicke auf die Kästchen ? und sie sagen dir, ob deine Antwort richtig oder falsch ist.

Beantwortest du eine Frage falsch, musst du sie erst richtig beantworten, bevor sie gewertet wird.

Wenn du alle Fragen richtig beantwortet hast, ist die Übung geschafft.

1 / 3 Nächste Frage =>



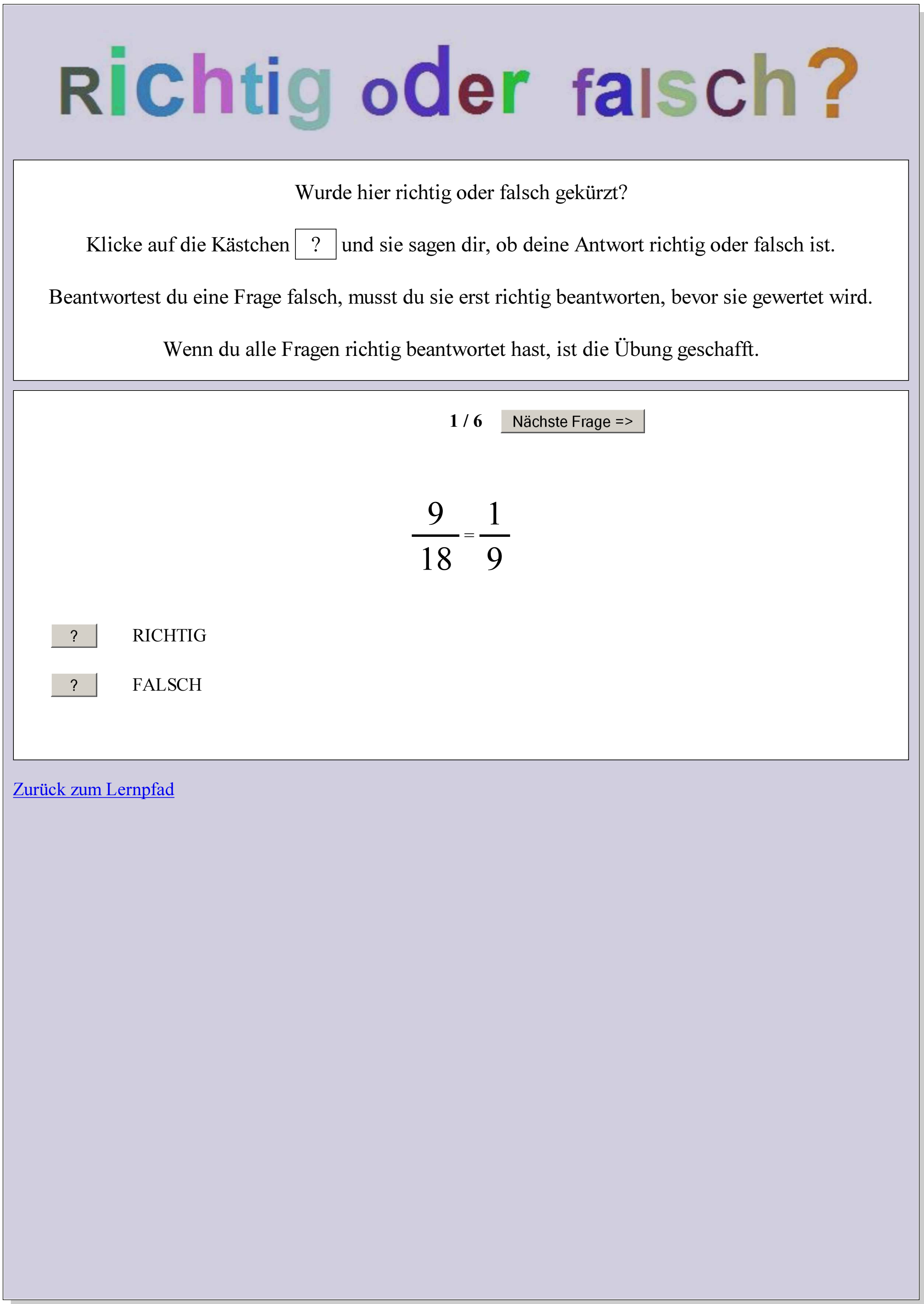
? Es wurde mit 2 gekürzt.

? Es wurde mit 3 gekürzt.

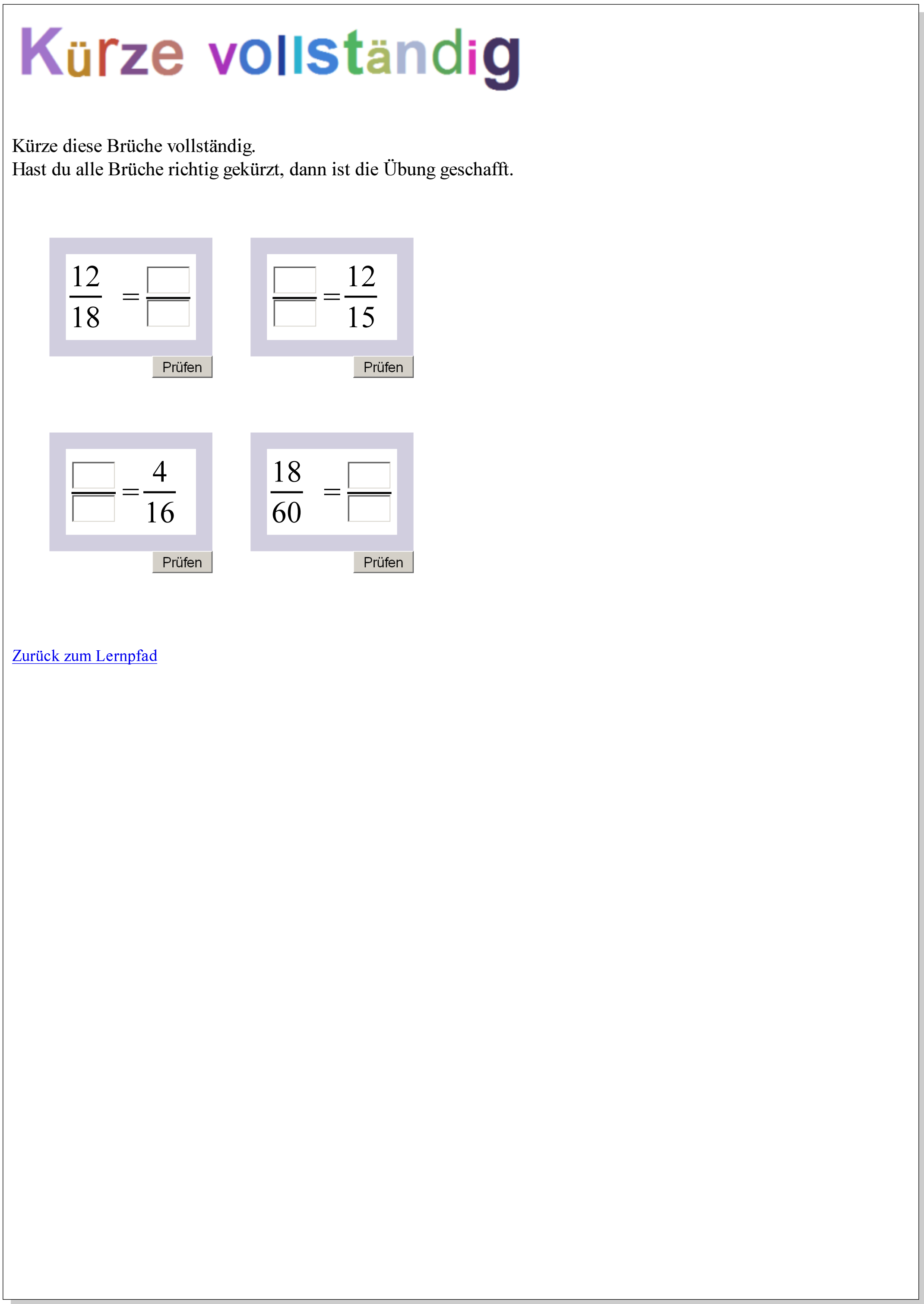
? Es wurde mit 4 gekürzt.

Zurück zum Lernpfad

D.7.4 Quiz: Richtig oder falsch?



D.7.5 Kürze vollständig


Kürze vollständig

Kürze diese Brüche vollständig.
Hast du alle Brüche richtig gekürzt, dann ist die Übung geschafft.

$\frac{12}{18} = \frac{\square}{\square}$ Prüfen

$\frac{\square}{\square} = \frac{12}{15}$ Prüfen

$\frac{\square}{\square} = \frac{4}{16}$ Prüfen

$\frac{18}{60} = \frac{\square}{\square}$ Prüfen

Zurück zum Lernpfad

Kürze vollständig

Schwer

Kürze diese Brüche vollständig.
Hast du alle Brüche richtig gekürzt, dann ist die Übung geschafft.

$\frac{48}{60} = \frac{\square}{\square}$ Prüfen

$\frac{\square}{\square} = \frac{24}{120}$ Prüfen

$\frac{\square}{\square} = \frac{96}{288}$ Prüfen

Zurück zum Lernpfad

Anhang E

Lernpfad „Brüche vergleichen”

Mathematik-digital/Größenvergleich von Brüchen

aus ZUM-Wiki, dem Wiki für Lehr- und Lerninhalte auf ZUM.de

< Mathematik-digital(Weitergeleitet von Benutzer:Katja Heimlich/Lernpfad Größenvergleich von Brüchen)

zurück zum Lernpfad Brüche kürzen

Lernpfad

Größenvergleich von Brüchen

Teil 3 der Lernpfadgruppe: Brüche erweitern, kürzen und vergleichen.

- **Zeitbedarf: in der Probephase**
- **Material: Laufzettel**

Kurzinfo:

Diese Seite gehört zu **mathematik-digital**.
zur Linkdatenbank

Wer hat nun mehr Kuchen gegessen?

Ob **4** größer ist als **2**, das ist nicht schwer.

Aber der Größenvergleich mit Brüchen ist nicht ganz so einfach.

Station 1.Regel

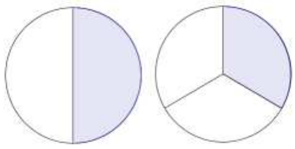
Regel für Stammbrüche

Damit du Brüche vergleichen zu kannst, gibt es **drei** Regeln, die dir dabei helfen können.

[Rechtsklick:] Findest du die erste Regel heraus?

Bei Stammbrüchen, also wenn im Zähler eine **1** steht, musst du nur die Nenner vergleichen.
Der Bruch mit dem kleineren Nenner ist größer.

Beispiel:



$\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$

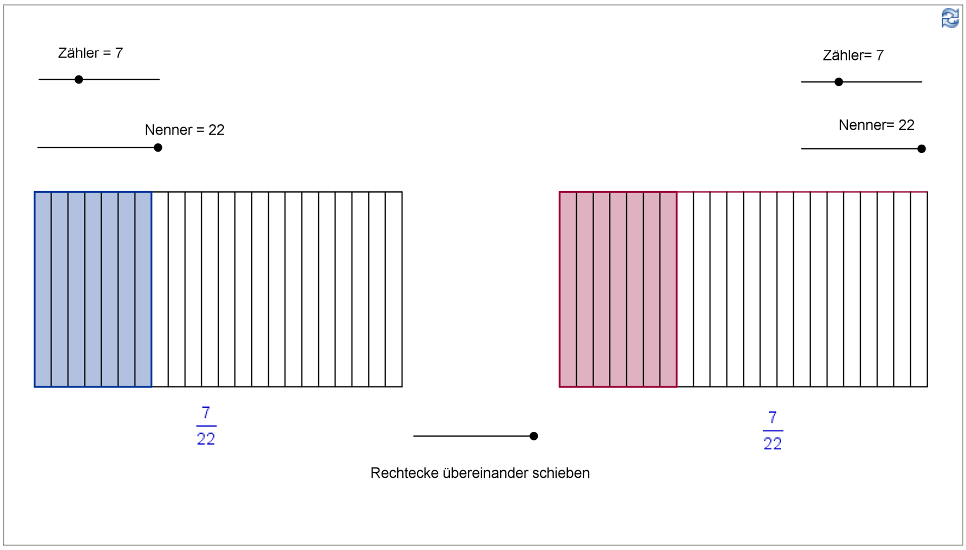
Aber gilt das nur für Stammbrüche?

Finde eine Regel

Bearbeite nun folgende Aufgaben und schreibe dir deine Antworten auf deinen Laufzettel, du wirst sie noch kontrollieren müssen.

Verstelle wieder zuerst den Nenner und dann den Zähler.

1. Stelle den Bruch $\frac{4}{7}$ und $\frac{4}{9}$ ein. Welcher Bruch ist größer?
2. Das Bruchpaar $\frac{9}{15}$ und $\frac{9}{10}$ hat den gleichen Zähler. Vergleiche den Nenner des größeren mit dem Nenner des kleineren Bruches.



Waren deine Antworten richtig? Teste dich:

1. Frage: [Lösung ausblenden]

$\frac{4}{7}$ ist der größere Bruch.

2. Frage: [Lösung ausblenden]

Der Nenner des größeres Bruches $\frac{9}{10}$ ist **kleiner** als der Nenner des kleineren Bruches $\frac{9}{10}$.

Die 1.Regel

Und die **1. Regel** lautet:

[Verstecken]

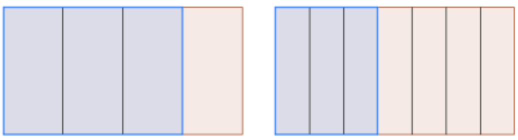
Die Vermutung gilt also für alle Brüche, die einen gleichen Zähler haben.

Schreibe dir den Merksatz in dein Heft:

Merke

1. Regel

Sind die Zähler gleich, dann musst du nur die Nenner vergleichen.
Der Bruch mit dem kleineren Nenner ist größer.

Beispiel: 

$$\frac{3}{4} > \frac{3}{7}$$

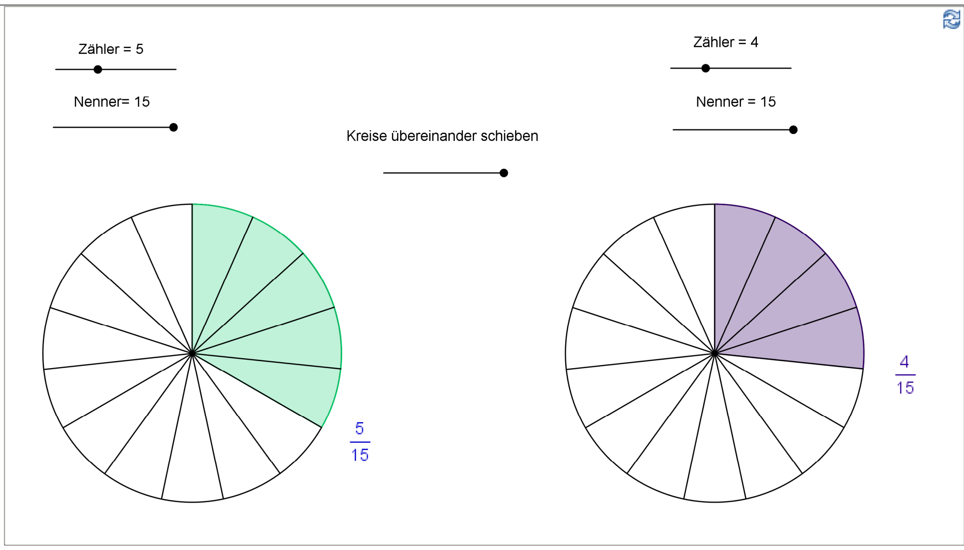
Station 2.Regel

Finde eine Regel

Versuche eine weitere Regel herauszufinden und schreibe dir die Lösungen der Fragen auf deinen Laufzettel.

Verstelle wieder zuerst den Nenner und dann den Zähler.

1. Stelle den Bruch $\frac{4}{7}$ und $\frac{6}{7}$ ein. Welcher Bruch ist größer?
2. Das Bruchpaar $\frac{9}{15}$ und $\frac{13}{15}$ hat den gleichen Nenner.
   Vergleiche den Zähler des größeren mit dem Zähler des kleineren Bruches.



Waren deine Antworten richtig? Teste dich:

1. Frage: [Lösung ausblenden]

$\frac{6}{7}$ ist der größere Bruch.

2. Frage: [Lösung ausblenden]

Der Zähler des größeres Bruches $\frac{13}{15}$ ist **größer** als der Zähler des kleineren Bruches $\frac{9}{15}$.

Die 2.Regel

Und die **2. Regel** lautet:

[Verstecken]

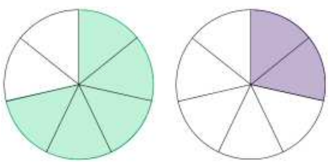
Schreibe dir den Merksatz in dein Heft:

Merke

2. Regel

Sind die Nenner gleich, dann musst du nur die Zähler vergleichen.
Der Bruch mit dem größeren Zähler ist größer.

Beispiel:



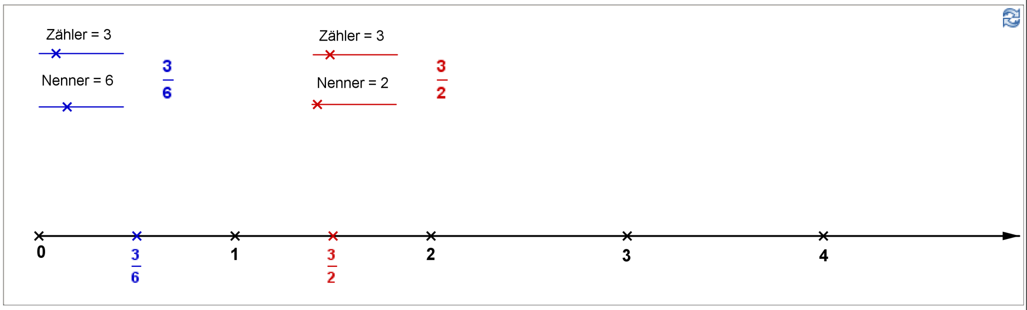
$$\frac{5}{7} > \frac{2}{7}$$

Station 3.Regel

Finde eine letzte Regel

Versuche eine letzte Regel herauszufinden und schreibe dir die Lösungen der Fragen auf deinen Laufzettel.

1. Stelle den Bruch $\frac{14}{9}$ und $\frac{12}{3}$ ein. Welcher Bruch ist größer?
2. Stelle den Bruch $\frac{6}{15}$ und $\frac{1}{5}$ ein. Welcher Bruch ist größer?



Waren deine Antworten richtig? Teste dich:

1. Frage: [Lösung ausblenden]

$\frac{12}{3}$ ist der größere Bruch.

2. Frage: [Lösung ausblenden]

$\frac{6}{15}$ ist der größere Bruch.

Aber da steckt doch keine Regel dahinter, oder?

Aber vielleicht kannst du eine daraus machen...

Der Hauptnenner

Schreibe dir den Merksatz in dein Heft:

Zwei oder mehr Brüche werden **gleichnamig** gemacht, indem man die Nenner so erweitert, dass alle Brüche danach die gleichen Nenner haben.

Den kleinsten gemeinsamen Nenner nennt man auch den **Hauptnenner**.

Es gibt schon eine Regel für Brüche, die den gleichen Nenner haben: die 2.Regel!

Die 3.Regel

Schreibe dir den Merksatz in dein Heft:

Merke

3. Regel

Sind weder die Zähler noch die Nenner gleich, dann musst du die Brüche gleichnamig machen.
Wenn sie dann den gleichen Nenner, z.B. den Hauptnenner haben, kannst du die 2.Regel anwenden.
Der Bruch mit dem größeren Zähler ist größer.

Beispiel: $\frac{5}{6} > \frac{7}{9}$

Die beiden Brüche haben den Hauptnenner 18.

Durch Erweitern auf den Hauptnenner, siehst du, dass $\frac{5\cdot 3}{6\cdot 3} = \frac{15}{18}$ und $\frac{7\cdot 2}{9\cdot 2} = \frac{14}{18}$ ist.

Nach der 2.Regel weißt du, dass $\frac{15}{18} > \frac{14}{18}$. Also ist $\frac{5}{6} > \frac{7}{9}$.

Station Übungen zum Hauptnenner und zum Größenvergleich

Bearbeite von links nach rechts alle vier Übungen.

Gibt es mehrere Aufgaben, musst du nur **eine** der Aufgaben bearbeiten.

Die Farben können dir bei deiner Entscheidung helfen:

leicht mittelschwer schwer

1. Übung	**2. Übung**	**3. Übung**	**4. Übung**
Erweitere auf einen gemeinsamen Nenner	**Erweitere auf den Hauptnenner**	**Quiz: Richtig oder falsch** oder **Größenvergleich**	**Sortieren der Größe nach**
[Rechtsklick:] Erweitere auf einen gemeinsamen Nenner	[Rechtsklick:] Erweitere auf den Hauptnenner	[Rechtsklick:] Quiz	[Rechtsklick:] leicht
		[Rechtsklick:] Größenvergleich	[Rechtsklick:] schwer

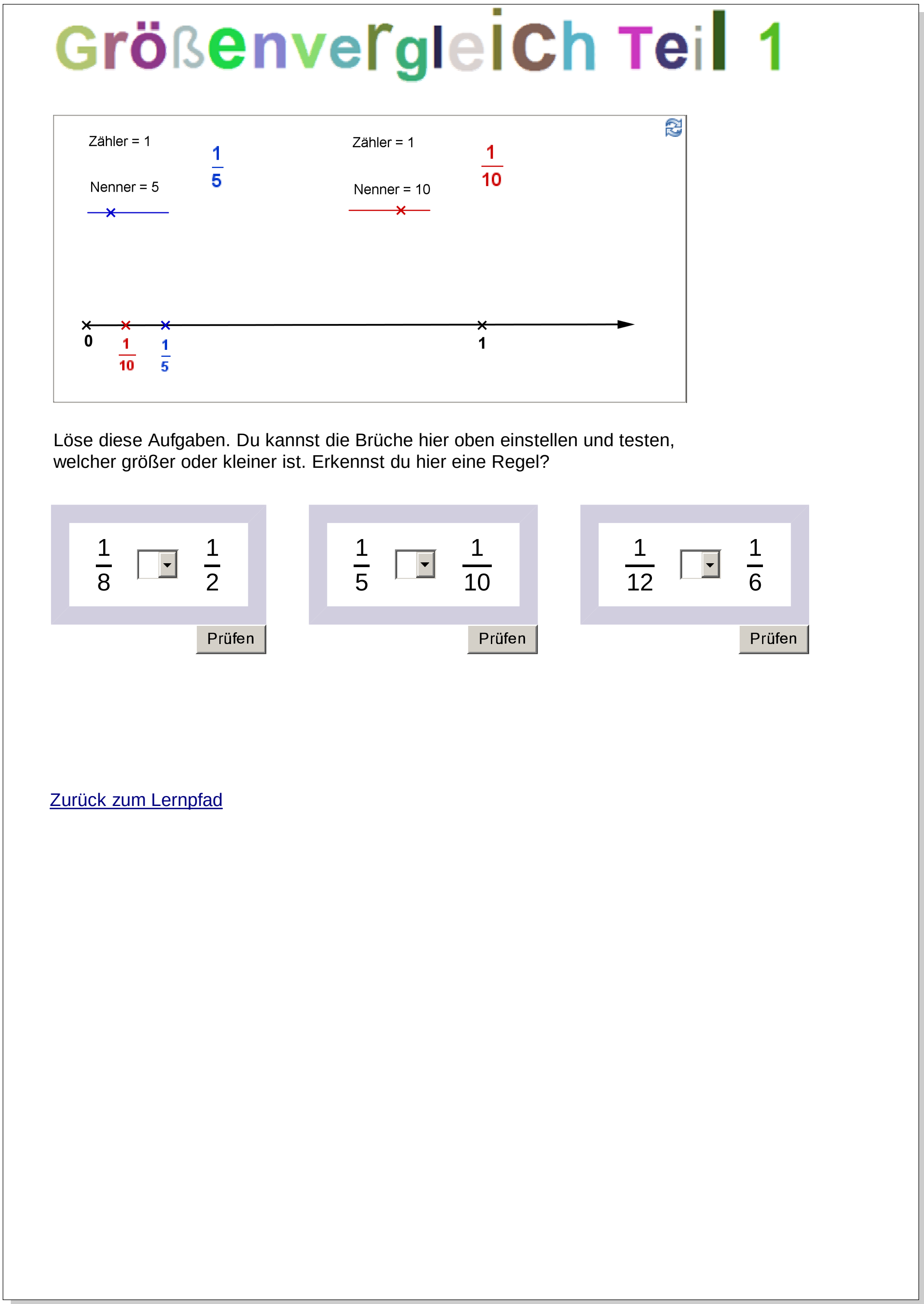
Von „http://wiki.zum.de/Mathematik-digital/Gr%C3%B6%C3%9Fenvergleich_von_Br%C3%BCchen“
Kategorien: Mathematik-digital | Bruchrechnung

- Diese Seite wurde zuletzt am 31. Oktober 2008 um 13:32 Uhr geändert.
-

Anhang F

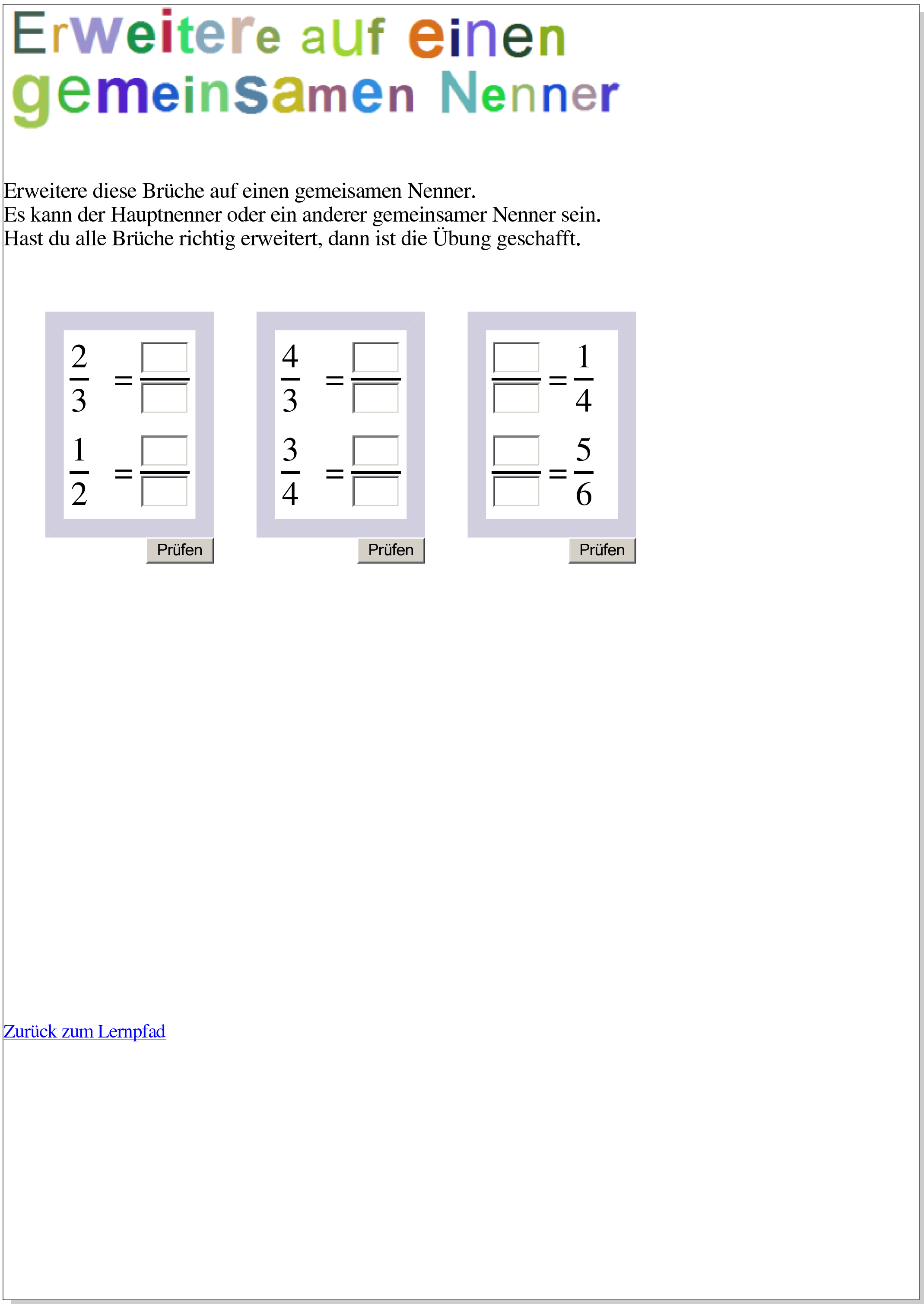
Externe Aufgaben zu „Brüche vergleichen”

F.1 Zahlenstrahl



F.2 Aufgabensammlung

F.2.1 Erweitere auf einen gemeinsamen Nenner



Erweitere auf einen gemeinsamen Nenner

Erweitere diese Brüche auf einen gemeisamen Nenner.
Es kann der Hauptnenner oder ein anderer gemeinsamer Nenner sein.
Hast du alle Brüche richtig erweitert, dann ist die Übung geschafft.

$\frac{2}{3} = \frac{\square}{\square}$

$\frac{1}{2} = \frac{\square}{\square}$

Prüfen

$\frac{4}{3} = \frac{\square}{\square}$

$\frac{3}{4} = \frac{\square}{\square}$

Prüfen

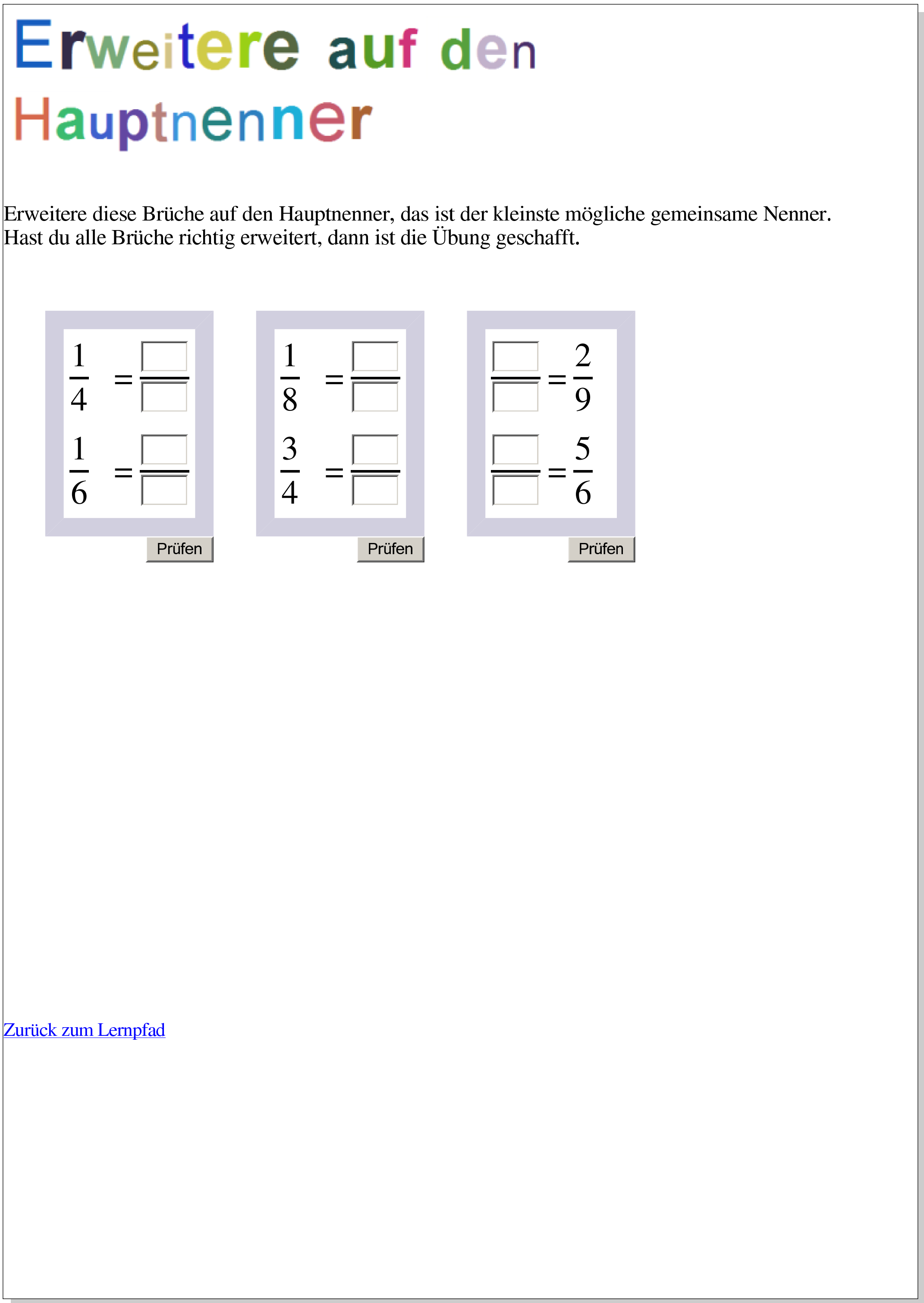
$\frac{\square}{\square} = \frac{1}{4}$

$\frac{\square}{\square} = \frac{5}{6}$

Prüfen

Zurück zum Lernpfad

F.2.2 Erweitere auf den Hauptnenner



Erweitere auf den Hauptnenner

Erweitere diese Brüche auf den Hauptnenner, das ist der kleinste mögliche gemeinsame Nenner.
Hast du alle Brüche richtig erweitert, dann ist die Übung geschafft.

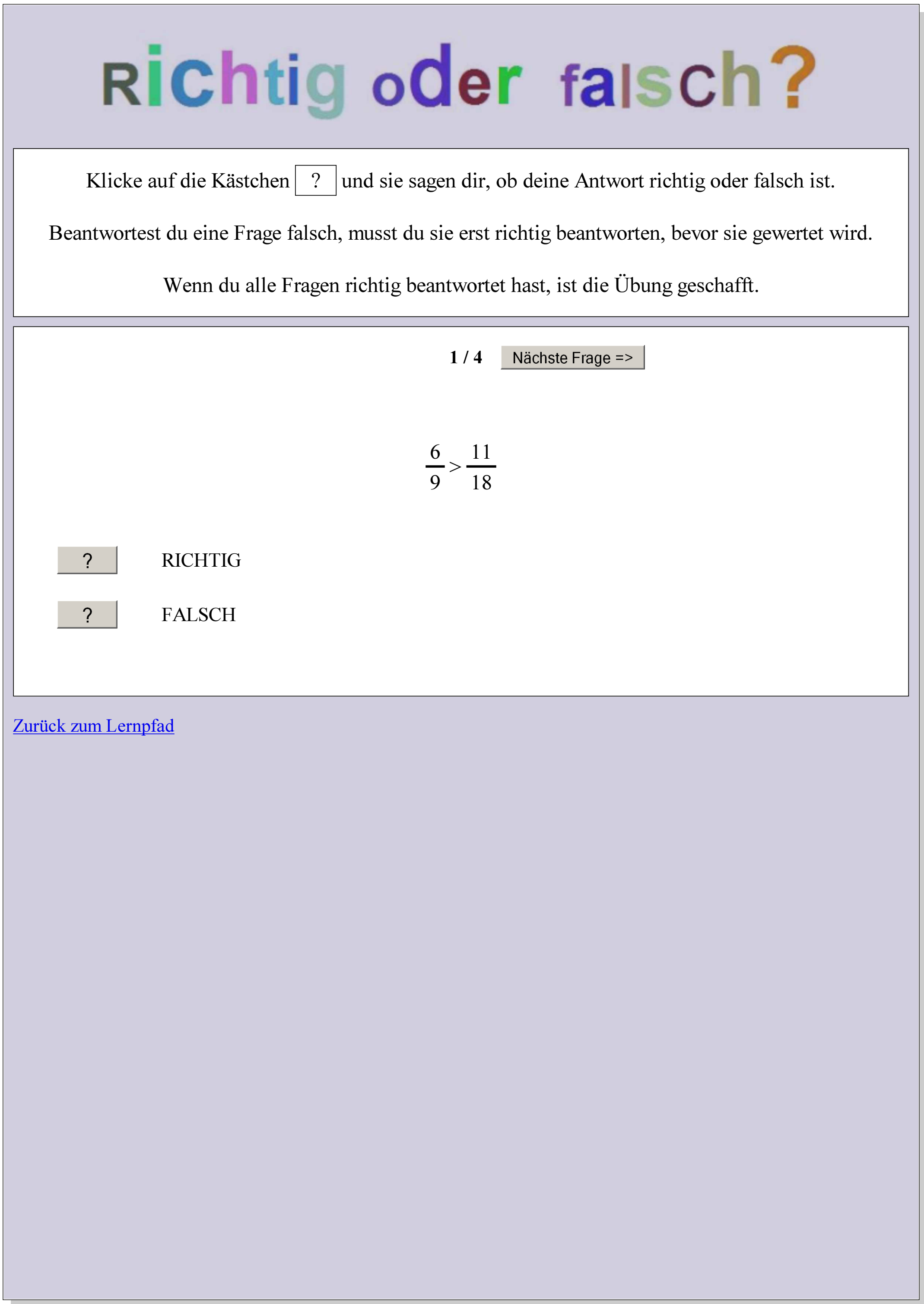
$\frac{1}{4} = \frac{\square}{\square}$ $\frac{1}{6} = \frac{\square}{\square}$ Prüfen

$\frac{1}{8} = \frac{\square}{\square}$ $\frac{3}{4} = \frac{\square}{\square}$ Prüfen

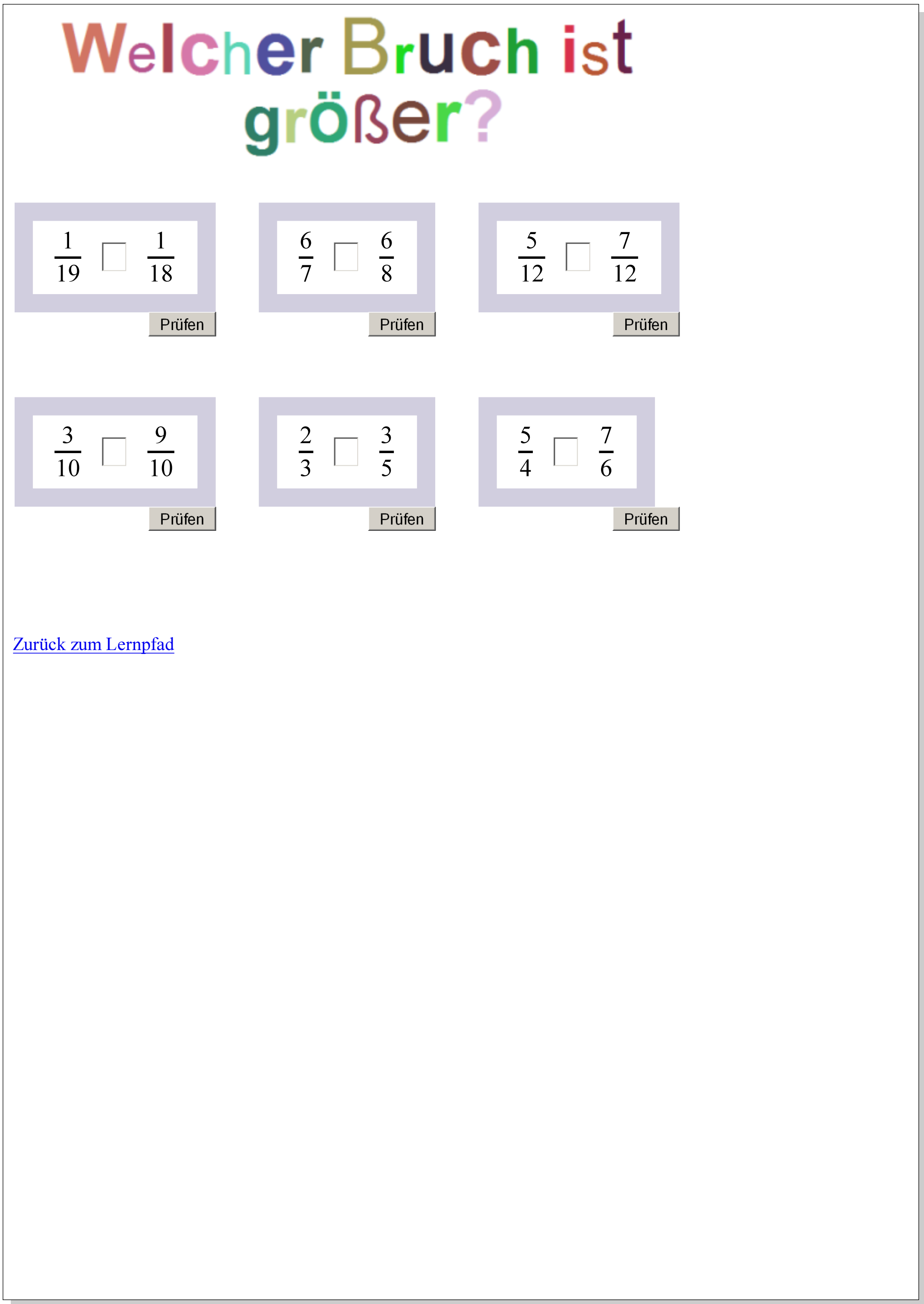
$\frac{\square}{\square} = \frac{2}{9}$ $\frac{\square}{\square} = \frac{5}{6}$ Prüfen

Zurück zum Lernpfad

F.2.3 Quiz: Richtig oder falsch



F.2.4 Welcher Bruch ist größer?



Welcher Bruch ist größer?

$\frac{1}{19}$ ☐ $\frac{1}{18}$ Prüfen

$\frac{6}{7}$ ☐ $\frac{6}{8}$ Prüfen

$\frac{5}{12}$ ☐ $\frac{7}{12}$ Prüfen

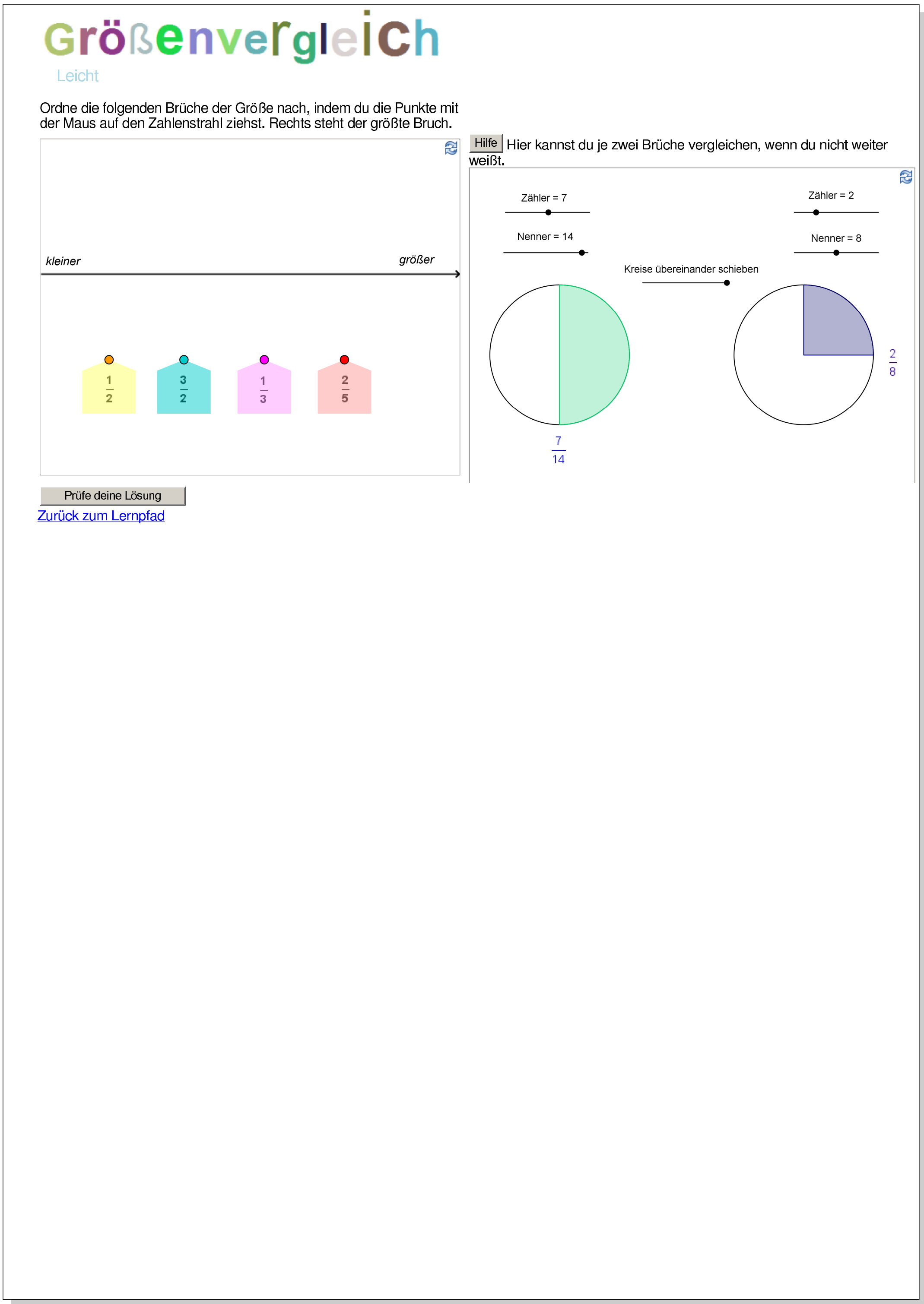
$\frac{3}{10}$ ☐ $\frac{9}{10}$ Prüfen

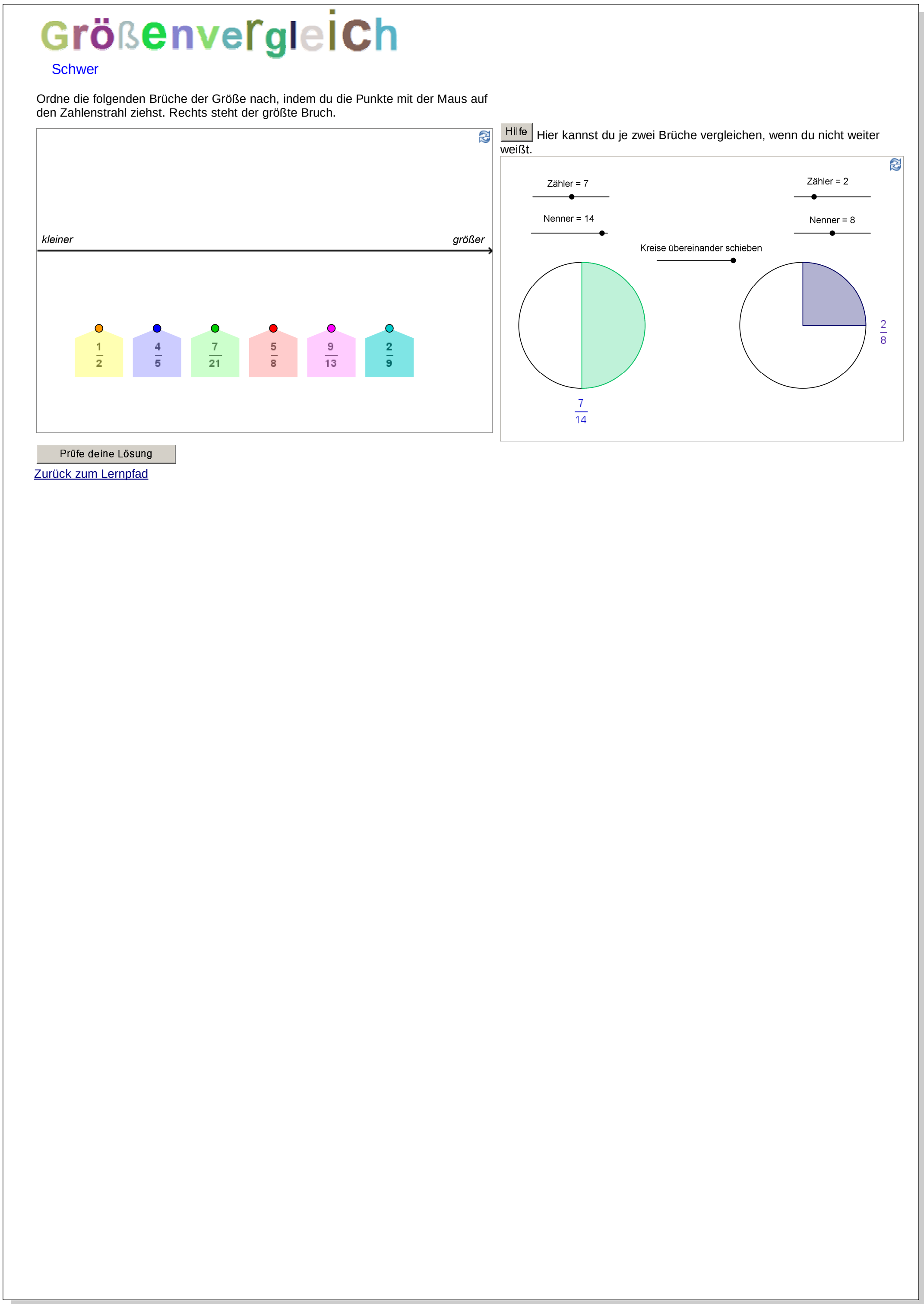
$\frac{2}{3}$ ☐ $\frac{3}{5}$ Prüfen

$\frac{5}{4}$ ☐ $\frac{7}{6}$ Prüfen

Zurück zum Lernpfad

F.2.5 Größenvergleich



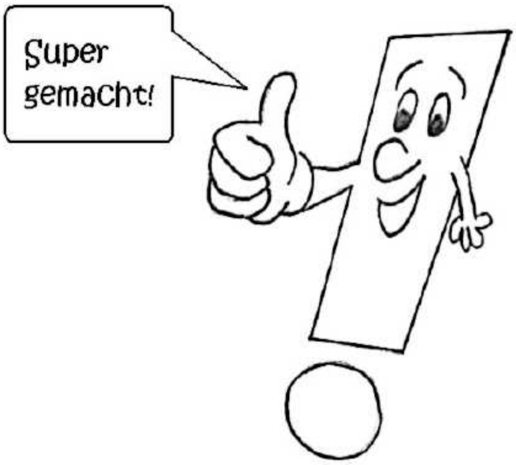

Größenvergleich
Schwer
Ordne die folgenden Brüche der Größe nach, indem du die Punkte mit der Maus auf den Zahlenstrahl ziehst. Rechts steht der größte Bruch.
kleiner
größer
1/2
4/5
7/21
5/8
9/13
2/9
Hilfe
Hier kannst du je zwei Brüche vergleichen, wenn du nicht weiter weißt.
Zähler = 7
Nenner = 14
Zähler = 2
Nenner = 8
Kreise übereinander schieben
7/14
2/8
Prüfe deine Lösung
Zurück zum Lernpfad

F.3 Zusammenfassung der Lernpfadgruppe

Du hast den Lernpfad erfolgreich geschafft!

Jetzt kannst du **Brüche erweitern**
zum Beispiel:

$$\frac{3}{2} = \frac{3 \cdot 7}{2 \cdot 7} = \frac{21}{14}$$



und auch **Brüche kürzen**
zum Beispiel:

$$\frac{12}{18} = \frac{12:2}{18:2} = \frac{6}{9}$$

sowie vollständig kürzen
zum Beispiel:

$$\frac{12}{18} = \frac{12:6}{18:6} = \frac{2}{3}$$

Außerdem kannst du die **Größe von Brüchen vergleichen**
zum Beispiel:

$\frac{2}{5} > \frac{2}{7}$ oder $\frac{4}{9} > \frac{2}{9}$ oder $\frac{3}{11} > \frac{5}{22}$

Anhang G

Laufzettel

G.1 Laufzettel zum Lernpfad „Brüche erweitern"

Name: Klasse: Datum:

Laufzettel zum Lernpfad

„Teil 1: Brüche erweitern"

- Dieser Laufzettel soll dich bei deiner Arbeit an dem Lernpfad „Brüche erweitern" begleiten. Damit du ihn nicht Zuhause vergisst, gibst du ihn am Ende der Stunde bei deiner Lehrerin oder deinem Lehrer ab.
- Auf dem Laufzettel kannst du dir Notizen machen und auch die Ergebnisse einiger Aufgaben notieren. Aber das steht im Lernpfad, wann du das machen sollst.
- Kreuze bitte nach jeder Station an, wie dir die Übungen gefallen haben. Dabei gilt:

Die Aufgabe fand ich toll.	Die Aufgabe fand ich nicht so toll.	Die Aufgabe fand ich schlecht.

Station Wiederholung

1. Puzzle: Was gehört alles zu einem Bruch?
2. Quiz: Welcher Bruchteil wird gezeigt?
3. Bruchteile anmalen

Station Einführung Erweitern

Suchbild „Zahlenstrahl": Die vier Unterschiede sind:

____

____

____

Station Zusammenhang zwischen bestimmten Brüchen

1. Was haben $\frac{1}{2}$ und $\frac{11}{22}$ gemeinsam?

____

____

2. Welchen Bruch hast du gefunden, der den gleichen Bruchteil wie $\frac{1}{4}$ zeigt?

____

____

Station Erweitern

1. Wir gehen Pizza essen
2. Die Rechnung, die dahinter steckt

   Deine Antworten:

   ____

   ____

   ____

   ____

   ____

   ____

3. Quiz: Was hast du verstanden?

Station Besonderheiten beim Erweitern

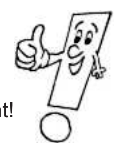
1. Schokoladen Aufgabe
2. Mit welchen Zahlen darfst du erweitern?

Station Übungen zum Erweitern

Hier brauchst du nur die Aufgaben bewerten, die du gemacht hast.

1. Berechne den erweiterten Bruch
2. Mit welcher Zahl wurde erweitert?
3. Erweiterung auf den gleichen Wert
4. Quiz: Richtig oder falsch?
5. Quiz: Welcher Bruch wurde erweitert?
6. Erweitere auf den gleichen Nenner

Das hat Spaß gemacht!



G.2 Laufzettel zu Lernpfad „Brüche kürzen"

Name: Klasse: Datum:

Laufzettel zum Lernpfad

„Teil 2: Brüche kürzen"

- Dieser Laufzettel soll dich bei deiner Arbeit an dem Lernpfad „Brüche kürzen" begleiten. Damit du ihn nicht Zuhause vergisst, gibst du ihn am Ende der Stunde bei deiner Lehrerin oder deinem Lehrer ab.
- Auf dem Laufzettel kannst du dir Notizen machen und auch die Ergebnisse einiger Aufgaben notieren. Aber das steht im Lernpfad, wann du das machen sollst.
- Kreuze bitte nach jeder Station an, wie dir die Übungen gefallen haben. Dabei gilt:

Die Aufgabe fand ich toll.	Die Aufgabe fand ich nicht so toll.	Die Aufgabe fand ich schlecht.

Station Alles Übersichtlich machen

1. Zimmer aufräumen
2. Bonbons verteilen
3. Hokuspokus
4. Übung: Welche Strecken sind zu viel?

Station Einführung Kürzen

1. Begriff Kürzen
2. Die Rechnung, die dahinter steckt

   Deine Antworten

3. Quiz: Was hast du verstanden?

Station Kürzen

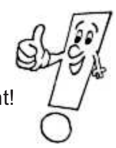
1. Quiz: Wie oft und mit welchen Zahlen kannst du einen Bruch kürzen?
2. Vollständig kürzen
3. Teilbarkeitsregeln

Station Übungen zum Kürzen

Hier brauchst du nur die Aufgaben bewerten, die du gemacht hast.

1. Kürze!
2. Mit welcher Zahl wurde gekürzt?
3. Quiz: Richtig oder falsch?
4. Kürze so weit wie möglich
5. Quiz: Findest du die passende Zahl?

Das hat Spaß gemacht!



G.3 Laufzettel zum Lernpfad „Brüche vergleichen"

Name: Klasse: Datum:

Laufzettel zum Lernpfad

„Teil 3: Brüche vergleichen"

- Dieser Laufzettel soll dich bei deiner Arbeit an dem Lernpfad „Brüche vergleichen" begleiten. Damit du ihn nicht Zuhause vergisst, gibst du ihn am Ende der Stunde bei deiner Lehrerin oder deinem Lehrer ab.
- Auf dem Laufzettel kannst du dir Notizen machen und auch die Ergebnisse einiger Aufgaben notieren. Aber das steht im Lernpfad, wann du das machen sollst.
- Kreuze bitte nach jeder Station an, wie dir die Übungen gefallen haben. Dabei gilt:

Die Aufgabe fand ich toll.	Die Aufgabe fand ich nicht so toll.	Die Aufgabe fand ich schlecht.

Station 1. Regel

1. Regel für Stammbrüche
2. Findest du eine Regel?
   1. ____________________
   2. ____________________
      ____
3. Regel für Brüche mit gleichem Zähler

Station 2. Regel

1. Findest du eine Regel?
   1. ____________________
   2. ____________________
      ____
3. Regel für Brüche mit gleichem Nenner

Station 3. Regel

1. Findest du eine Regel?
   1. ____________________
   2. ____________________

3. Hauptnenner
4. Regel für Brüche ohne gleichen Zähler oder Nenner

Station Übungen zum Hauptnenner und zum Größenvergleich

Hier brauchst du nur die Aufgaben bewerten, die du gemacht hast.

1. Erweitere auf einen gemeinsamen Nenner

2. Erweitere auf den Hauptnenner

1. Größenvergleich

2. Sortieren der Größe nach

3. Quiz: Richtig oder falsch?

Das hat Spaß gemacht!

Anhang H

Test

Bewertung des Lernpfads

„Brüche erweitern, kürzen und vergleichen“

Dieser Bewertungsbogen soll dich an deine Arbeit an dem Lernpfad „Brüche erweitern, kürzen und vergleichen“ erinnern. Gib ihn bitte ausgefüllt bei deiner Lehrerin ab.

Allgemeines zum Lernpfad

1. Wie hat dir die Arbeit am Lernpfad gefallen? Vergib eine Schulnote:

1	2	3	4	5	6
☐	☐	☐	☐	☐	☐

2. Würdest du den Lernpfad weiterempfehlen?

ja	nein
☐	☐

Wenn nein, warum?

____

____

3. Wie bist du mit dem Lernpfad zurechtgekommen? Vergib eine Schulnote:

1	2	3	4	5	6
☐	☐	☐	☐	☐	☐

4. Hier ist Platz für Lob und Kritik:

____

____

____

____

Lernpfad „Brüche erweitern“

1. Erweitere $\frac{4}{5}$ mit 6.

____

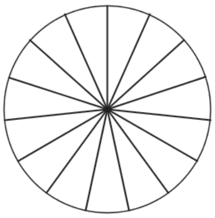
2. Finde zwei Brüche, die den gleichen Bruchteil wie $\frac{3}{7}$ anzeigen.

____

____

3. Veranschauliche das Erweitern mit 4 an diesem Bild:

4. Färbe so viele Felder des Kreises, dass $\frac{2}{3}$ aller Felder gefärbt sind.



Lernpfad „Brüche kürzen“

1. Nenne den Bruchteil der gefärbt ist, aber mit einem möglichst kleinen Nenner.

____

2. Ergänze die Lücken: Kürzt du $\frac{\boxed{}}{78}$ mit 6, dann erhältst du $\frac{2}{\boxed{}}$.
3. Korrigiere die Fehler, indem du entweder den Zähler **oder** den Nenner verbesserst. Der erste Bruch ist richtig.

   $\frac{16}{24} = \frac{6}{12} = \frac{1}{6}$

   ____

Lernpfad „Brüche vergleichen“

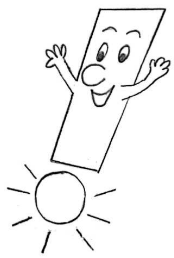
1. Begründe: Warum ist $\frac{3}{11}$ größer als $\frac{5}{22}$?

   ____

   ____

2. Ergänze so, dass die Ungleichungsketten stimmen.

   $\frac{2}{7} < \frac{\boxed{}}{7} < \frac{5}{7}$ $\frac{5}{6} > \frac{\boxed{}}{7} > \frac{5}{\boxed{}}$



Literaturverzeichnis

BARZEL, Bärbel / WEIGAND, Hans-Georg (2008): »*Medien vernetzen*«. In: mathematik lehren 146, S. 4–10.

BARZEL, Bärbel / BÜCHTER, Andreas / LEUDERS, Timo (2007): *Mathematik Methodik. Handbuch für die Sekundarstufe I und II.* Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor GmbH & Co. KG.

BRUNNERMEIER, Achim / HERZ, Andreas / KAMMERMEYER, Fritz (2004): *Fokus Mathematik. Jahrgangsstufe 6.* Berlin: Cornelsen Verlag.

BIBLIOGRAPHISCHES INSTITUT & F.A. BROCKHAUS AG (Hrsg.) (2006): *Brockhaus Enzyklopädie in 30 Bänden. Bd. 7 Dieu–Emar.* 21., völlig neu bearb. Aufl. Mannheim: Bibliographisches Institut & F.A. Brockhaus AG.

BÖHRINGER, Joachim / BÜHLER, Peter / SCHLAICH, Patrick (2008): *Kompendium der Mediengestaltung für Digital- und Printmedien.* 4., vollst. überarb. und erw. Aufl. Berlin / Heidelberg: Springer-Verlag.

BUCHNER, Helga et al. (2002): *Thema Mathe 6. Mathematik für die sechsstufige Realschule.* Hrsg. von Gerhard Reich und Günter Rothmeier. Bamberg: C.C. Buchner Verlag.

DBS (2002): *Mathe mit Fuchs. Brüche selbstständig begreifen.*
URL: http://www.bildungsserver.de/db/fwulesen.html?Id=200008291
[Stand 18.08.2008]

DLUGOSCH, Johannes et al. 2004: *Mathematik 6. Realschule Bayern.* Braunschweig: Bildungshaus Schulbuchverlage.

EMBACHER, Franz (2004a): *Lernpfade - Wege zu selbstgesteuertem Lernen.* Paper zum Vortrag auf der 9. Internationalen Tagung über Schulmathematik: Alternative Wege in Unterricht und Leistungsbeurteilung. Technische

Universität Wien.
URL: http://www.mathe-online.at/monk/TU26.2.2004/paperLernpfade.doc
[Stand 03.01.2009]

Embacher, Franz (2004b): *Das Konzept der Lernpfade in der Mathematik-Ausbildung*. Paper zum Vortrag im Rahmen der Reihe „Internet - Forschung - Lehre". Universität Wien.
URL: http://www.mathe-online.at/literatur/iwk7.6.2004/artikelIWK.rtf
[Stand 05.01.2009]

Flindt, Nicole (2005): *e-learning. Theoriekonzepte und Praxiswirklichkeit.* Inaugural-Dissertation, Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg.

Fuchs, Georg (2000): *Mathe mit Fuchs. Brüche selbstständig begreifen. Ab der 5. Schulstufe*. Wien: öbd&hpt VerlagsgmbH.

Führer, Lutz (1997): *Pädagogik des Mathematikunterrichts. Eine Einführung in die Fachdidaktik für Sekundarstufen*. Braunschweig / Wiesbaden: Vieweg & Sohn Verlagssgesellschaft.

Holland, Gerhard (2007): *Geometrie in der Sekundarstufe. Entdecken - Konstruieren - Deduzieren. Didaktische und methodische Fragen*. 3., neu bearb. und erw. Aufl. Hildesheim / Berlin: Franzbecker Verlag.

ISB (2008): *Lehrpläne Realschule R6. Mathematik Jahrgangsstufe 6.*
URL: http://www.isb.bayern.de/isb/download.aspx?DownloadFileID=39b2ca2efa78c7459585ddf919660336
[Stand: 10.02.2009]

Jahnke, Thomas (1995): »*Bruchrechnung – ein Dauerthema?*« In: mathematik lehren 73, S. 4–5.

Kerres, Michael (2001): *Multimediale und telemediale Lernumgebungen: Konzeption und Entwicklung*. 2., vollst. überarb. Aufl. München / Wien: Oldenburg Wissenschaftsverlag.

KMK (Hrsg.) (2004): *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss*. Hrsg. vom Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland. München:

Wolters Kluwer Deutschland.
URL: http://www.kmk.org/schul/Bildungsstandards/Mathematik_MSA_BS_04-12-2003.pdf
[Stand: 02.01.2009]

Köhler, Thomas / Kahnwald, Nina / Reitmaier, Martina (2008): »*Lehren und Lernen mit Multimedia und Internet*«. In: Batinic, Bernad / Appel, Markus: Medienpsychologie. Heidelberg: Springer Medizin Verlag, S. 477–501.

Kozdon, Baldur (1977): *Grundzüge entdeckenden Lernens. Ein Beitrag zur Theorie des produktiven Unterrichts*. Bd. 81 der Reihe Harms pädagogische Reihe. Hrsg. von Rudolf Renard. München: Paul List Verlag.

Kurth, Ina (1995): »*Einstieg(e) in die Bruchrechnung*«. In: mathematik lehren 73, S. 20–22 und 47–49.

Lautenbach, Ernst (2004): *Lexikon Goethe Zitate. Auslese für das 21. Jahrhundert. Aus Werk und Leben*. München: Iudicium Verlag.

Malle, Günther (2004): »*Grundvorstellungen von Bruchzahlen*«. In: mathematik lehren 123, S. 4–9.

Meschenmoser, Helmut (2002): *Lernen mit Multimedia und Internet*. Bd. 5 der Reihe Basiswissen Pädagogik. Unterrichtskonzepte und -techniken. Hrsg. von Manfred Bönsch und Astrid Kaiser. Baltmannsweiler: Schneider-Verlag Hohengehren.

Meyer, Michael (2007): »*Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht – Zur Rolle der Abduktion des Arguments*«. In: Journal für Mathematik-Didaktik 2007 Heft 3/4, S. 286–310.

Myers, David (2008): *Psychologie*. 2., erw. und aktual. Aufl. Heidelberg: Springer Medizin Verlag.

Neber, Heinz (2002): »*Entdeckendes Lernen*«. In: Hameyer, Uwe / Schlichting, Frank (Hrsg.): Entdeckendes Lernen Bd. 3 der Reihe Impulse. Innovationsmodelle zur Planung von Unterricht und Lehre. Kronshagen: Körner Verlag, S. II 10–II 23.

OBERHUEMER, Petra (2004): *Open Studio und Lernpfade - Einführung in das praktische Arbeiten.* Präsentation zum Workshop der 9. Internationalen Tagung über Schulmathematik: Alternative Wege in Unterricht und Leistungsbeurteilung. Technische Universität Wien.
URL: http://www.mathe-online.at/monk/TU26.2.2004/Workshop26.02.2004.pps
[Stand: 03.01.2009]

PADBERG, Friedhelm (2000): »*Die Bruchrechnung – ein Auslaufmodell?*« In: Der Mathematikunterricht 2000 Heft 2, S. 5–23.

PADBERG, Friedhelm (Hrsg.) (2002): *Didaktik der Bruchrechnung. Gemeine Brüche. Dezimalbrüche.* 3. Aufl. Heidelberg / Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.

PAVEL, Wolfgang (2007): *PHP-Formeleditor zur Herstellung mathematischer Formeln in HTML.*
URL: http://wpavel.de/wpformeleditor/wpformeleditor.php
[Stand 30.08.2008]

POSTEL, Helmut (1981): »*Größen- oder Operatorkonzept in der Bruchrechnung?*« In: Der Mathematikunterricht 1981 Heft 4, S. 16–46.

PROFKE, Lothar (1991): »*Bruchrechnung im Mathematikunterricht*«. In: Mathematik lehren und lernen. Festschrift für Heinz Greisel. Hrsg. von Helmut Postel, Arnold Kirsch und Werner Blum. Hannover: Schroedel Schulbuchverlag.

REIMANN, Gabi (2007): »*Wissen – Lernen – Medien: E-Learning und Wissensmanagement als medienpädagogische Aufgaben*«. In: Sensik, Werner / Kerres, Michael / Moser, Heinz (Hrsg): Medienpädagogik – Standortbestimmung einer erziehungswissenschaftlichen Disziplin. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften / GWV Fachverlage, S. 179–197.

SCHÄTZ, Ulrike / EISENTRAUT, Franz (Hrsg.) (2004): *delta 6. Mathematik für Gymnasien.* Bamberg: C.C. Buchner Verlag.

SCHILLINGER, Dieter (2007): *Mathematik aktuell 6. Schülerarbeitsheft für den Mathematikunterricht.* 6. Aufl. Ochsenfurt: BDS-Verlag.

SELFHTML e.V. (Hrsg.) (2007): *Angabe zur Zeichenkodierung.*
URL: http://de.selfhtml.org/html/kopfdaten/meta.htm#zeichenkodierung
[Stand 01.02.2009]

Stark Verlag (Hrsg.) (2006): *Kompakt-Wissen Realschule. Mathematik.* Freising: Stark Verlagsgesellschaft mbH & Co. KG.

Stein, Martin (2004): *Bruchrechnung.*
URL: http://www-madin.math.uni-wuppertal.de/navigator/navigator.html?StartOS=madin/bruchrechnung/object_set.html
[Stand: 15.12.2008]

Staemmler, Daniel (2006): *Lernstile und interaktive Lernprogramme. Kognitive Komponenten des Lernerfolges in virtuellen Lernumgebungen.* Hrsg. von Franz Lehner und Freimut Bodendorf. Wiesbaden: Deutscher Universitäts-Verlag / GWV Fachverlage.

Stepancik, Evelyn (2004): *Didaktik der Lernpfade.* Workshop der 9. Internationalen Tagung über Schulmathematik: Alternative Wege in Unterricht und Leistungsbeurteilung. Technische Universität Wien.
URL: http://www.mathe-online.at/monk/TU26.2.2004/didaktik01.pps
[Stand: 03.01.2009]

Streefland, Leen (1995): »*Pizzas – Anregungen, ja schon für die Grundschule*«. In: mathematik lehren 73, S. 8–11.

Wagner, Irmgard / Wagner, Anton (2005): *Schulaufgabentrainer. Fokus Mathematik 6.* Berlin: Cornelsen Verlag.

Weigand, Hans-Georg (o. J.): *Didaktische Prinzipien.* Manuskript, Würzburg.
URL: http://www.mathematik-informatik.uni-wuerzburg.de/fileadmin/10040500/dokumente/Texte_zu_Grundfragen/weigand_didaktische_prinzipien.pdf
[Stand 15.01.2009]

Weigand, Hans-Georg / Weth, Thomas (2002): *Computer im Mathematikunterricht. Neue Wege zu alten Zielen.* Heidelberg / Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.

Weigand, Hans-Georg / Vollrath, Hans-Joachim (2007): *Algebra in der Seknundarstufe*. Hrsg von Friedhelm Padberg. 3. Aufl. München: Spektrum Akademischer Verlag.

Weigel, Wolfgang (2008): *Zur Integration von virtueller Lehre (E-Learning) und Neuen Technologien in die Mathematik-Lehramtsausbildung*. Dissertationsschrift, Universität Würzburg.

Winter, Heinrich (o. J.): *Mehr Sinnstiftung, mehr Einsicht, mehr Leistungsfähigkeit im Mathematikunterricht, dargestellt am Beispiel der Bruchrechnung*. Manuskript, Aachen.
URL: http://sinus-transfer.uni-bayreuth.de/fileadmin/MaterialienDB/38/bruchrechnung.pdf
[Stand 06.02.2009]

Winter, Heinrich (1976): »*Strukturorientierte Bruchrechnung*«. In: Beitäge zur Mathematikdidaktik. Festschrift für Wilhelm Oehl. Zusammengestellt von Heinrich Winter und Erich Wittmann. Hannover et al.: Hermann Schroedel Verlag KG.

Winter, Heinrich (1989): *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik*. Hrsg. von Erich Ch. Wittmann. Braunschweig: Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft.

de Witt, Claudia (2008): »*Lehren und Lernen mit neuen Medien/E-Learning*«. In: Sander, Uwe / von Gross, Frederike / Hugger, Kai-Uwe (Hrsg.): Handbuch Medienpädagogik. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften / GWV Fachverlage, S. 440–448.

Zimbardo, Philip / Gerrig, Richard (1999): *Psychologie*. Bearb. und hrsg. von Siegfried Hoppe-Graff und Irma Engel. 7., neu übers. und bearb. Aufl. Berlin / Heidelberg / New York: Springer-Verlag.

Zocher, Ute (2000): *Entdeckendes Lernen lernen. Zur praktischen Umsetzung eines pädagogischen Konzepts in Unterricht und Lehrerfortbildung*. Hrsg. von Jörg Petersen und Gerd-Bodo Reinert. Donauwürth: Auer Verlag.

ZUM Internet e.V. (2006): *Textgestaltung*.
URL: http://wiki.zum.de/Hilfe:Textgestaltung
[Stand 09.02.2009]

ZUM Internet e.V. (2007): *Lernpfad.*
URL: http://wiki.zum.de/Lernpfad
[Stand 13.01.2009]

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die Arbeit in allen Teilen selbstständig gefertigt und keine anderen als die in der Arbeit angegebenen Hilfsmittel benutzt habe. Die Zeichnungen, Diagramme und alle weiteren bildlichen Darstellungen habe ich selbst gefertigt.

Würzburg, 18. Mai 2009